

# Au sujet du nombre de Reynolds et des coefficients aérodynamiques

11 juillet 2007

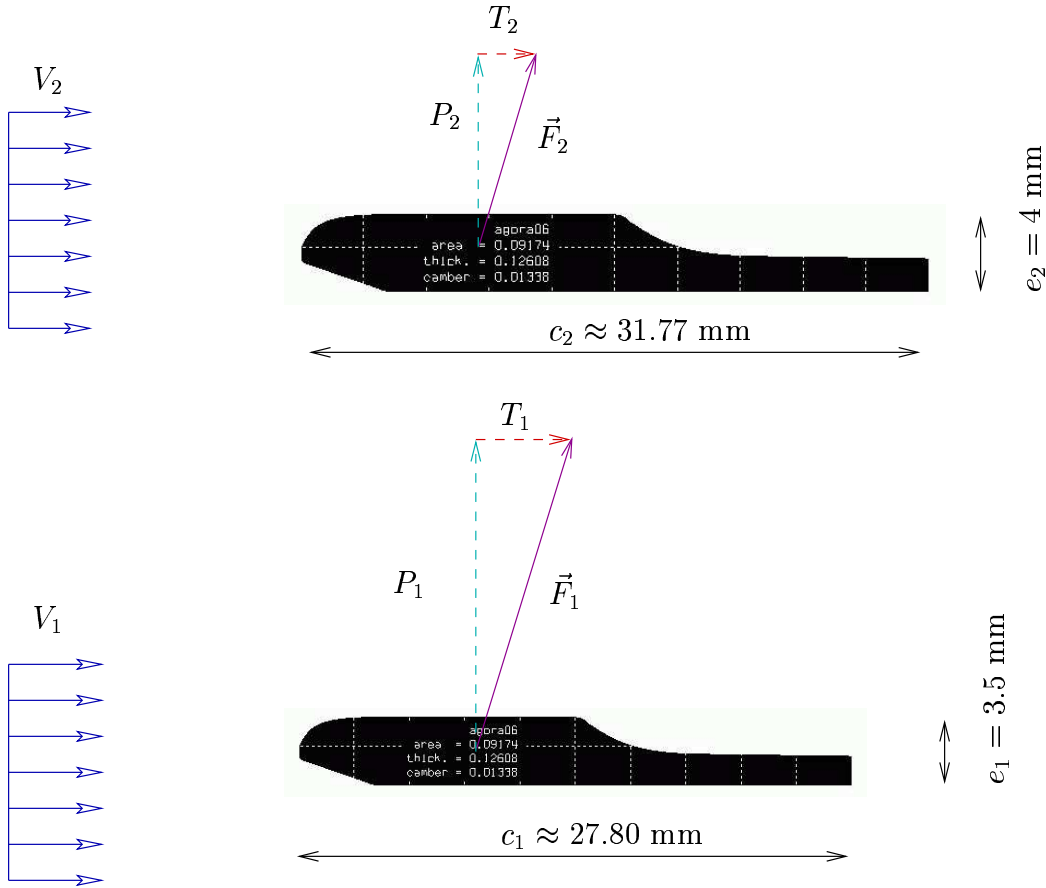


FIG. 1 – Les 2 profils.

## 1 Nombre de Reynolds

Considérons un profil d'aile (cf FIG. 1) d'épaisseur  $e$  et de corde  $c$  telle que :

$$\frac{e}{c} = 0.1259$$

et fabriquons-le pour 2 épaisseurs différentes donc pour 2 cordes différentes :

$$e_1 = 3.5 \text{ mm} \implies c_1 \approx 27.80 \text{ mm} \quad \text{et} \quad e_2 = 4.0 \text{ mm} \implies c_2 \approx 31.77 \text{ mm}$$

On a donc :

$$\frac{e_2}{c_2} = \frac{e_1}{c_1} = 0.1259 \implies \frac{e_2}{e_1} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{4.0}{3.5} = \frac{31.77}{27.80} \approx 1.1428$$

En soumettant, respectivement à ces 2 profils, un vent (air) de vitesse respective  $V_1$  et  $V_2$ , chacun des 2 profils subit une force  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  qui possèdent chacune des composantes de trainée ( $T_1$  et  $T_2$ ) et de portance ( $P_1$  et  $P_2$ ) ; De plus chacune des forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  s'applique en un point bien précis (de chaque profil).

Osborne Reynolds (1883) a remarqué que si les vitesses de vent sont dans le rapport :

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{4.0}{3.5} = \frac{31.77}{27.80} \approx 1.1428$$

les forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  sont alors de même direction et possède le même point d'application sur le profil (cf FIG. 1) mais ne sont pas de même intensité. Leurs intensités (de la force globale ou d'une des composantes de portance ou trainée) sont proportionnelles :

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{P_1}{P_2} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{c_1}{c_2} \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^2 = \frac{V_1}{V_2} \approx 1.1428 \quad (1)$$

	Profil 2	Profil 1
vitesse	$V_2 = 8.49 \text{ m.s}^{-1}$	$V_1 = 1.1428 V_2 = 9.71 \text{ m.s}^{-1}$
Portance par unité d'envergure	$P_2 = 0.2562 \text{ N.m}^{-1}$	$P_1 = 0.2928 \text{ N.m}^{-1}$
Trainée par unité d'envergure	$T_2 = 0.0634 \text{ N.m}^{-1}$	$T_1 = 0.0724 \text{ N.m}^{-1}$

Osborne Reynolds en conclue que lorsque l'on a réalisé des expériences<sup>2</sup> sur ce profil pour différentes vitesses, il n'est pas utile de refaire ces expériences sur le même profil coté différemment ...ce qui va faciliter le travail expérimental<sup>3</sup>. Une fois que l'on connaît les résultats à une vitesse donnée sur ce profil pour une corde donnée, on peut en déduire les résultats à une autre vitesse - mais pas n'importe laquelle - pour une autre corde. Osborne Reynolds a défini un nombre qu'il a appelé nombre de Reynolds  $\mathcal{R}$  qui permet de préciser un trinôme de valeurs : la corde  $c$ , la vitesse  $V$  et également la viscosité cinématique<sup>4</sup> du fluide  $\nu$  :

$$\mathcal{R} = \frac{Vc}{\nu}$$

Pour simplifier la suite, notre fluide est de l'air qui possède la viscosité cinématique  $\nu = 0.15 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2.\text{s}^{-1} = 0.15 \text{ cm}^2.\text{s}^{-1}$ .

On remarque que le nombre de Reynolds n'a pas d'unité : c'est un nombre sans dimension.

En examinant la relation  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{c_2}{c_1}$ , on remarque que la comparaison précédentes des 2 profils (dans le même fluide) est réalisée au même nombre de Reynolds :

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{c_2}{c_1} \implies V_1 c_1 = V_2 c_2 \implies \frac{V_1 c_1}{\nu} = \frac{V_2 c_2}{\nu} \implies \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$$

C'est d'ailleurs pour cela que les forces sont proportionnelles.

<sup>1</sup>Les forces sont données par mètre d'envergure (longueur perpendiculaire au dessin) du profil.

<sup>2</sup>ou calcul par ordinateur

<sup>3</sup>et minimiser le nombre de calculs par ordinateur

<sup>4</sup>Osborne Reynolds a remarqué en faisant des expériences avec différents fluides (eau, air, huiles, ...) que la viscosité du fluide est aussi important que la corde et la vitesse.

## 2 Coefficients aérodynamiques

Bernoulli (prédécesseur de Reynolds) avait établi qu'un fluide possède une énergie volumique<sup>5</sup> quand il possède une vitesse ; *On s'en aperçoit lorsque, en vélo, on consomme d'autant plus d'énergie pour pédaler et avancer que l'on essaye d'aller vite.* Cette énergie volumique est quantifiée par<sup>6</sup> :

$$\frac{1}{2}\rho V^2 \text{ où } \rho = 1.24 \text{ kg.m}^{-3} \text{ est la masse volumique de l'air.}$$

Cette énergie volumique a pour unité  $\text{J.m}^{-3} = \text{N.m.m}^{-3} = \text{N.m}^{-2}$  qui est l'unité d'une pression.

*L'énergie que l'air nous fournit pour nous ralentir en vélo provient d'une force sur la surface de notre corps qui provient de cette pression "dynamique"*<sup>7</sup>.

Les chercheurs qui souhaitaient établir une relation entre cette pression dynamique et la force exercée par un fluide (l'air) sur un obstacle (profil, cycliste, ...) se sont dit que, la force provenant de la pression, il fallait une surface :

$$\text{Force} = \text{Pression} \cdot \text{Surface} \implies F = \frac{1}{2}\rho V^2 S$$

Mais les chercheurs se sont aperçu - avec leurs résultats d'expériences - que cette formule n'était pas correcte car - entre autres - la pression qui règne en chaque point de l'obstacle n'est pas  $\frac{1}{2}\rho V^2$ . Ils ont donc corrigés cette formule en insérant un coefficient aérodynamique  $C^8$  :

$$F = \frac{1}{2}\rho V^2 SC = \frac{1}{2}\rho SCV^2$$

et vu que l'on parle de trainée et de portance - en ce qui concerne la force - on fait intervenir 2 coefficients aérodynamiques  $C_x$  et  $C_z$  :

$$P = \frac{1}{2}\rho SC_z V^2 \quad T = \frac{1}{2}\rho SC_x V^2$$

Attention, tout n'est pas dit car l'aérodynamique réserve des surprises : ces 2 coefficients aérodynamiques ne sont pas constants pour un obstacle (profil) donné! ...

## 3 Comparaison de 2 profils

Le but de l'époque de Osborne Reynolds était de comparer un profil d'aile (d'avion) par rapport à un autre pour une vitesse donnée  $V$ . Les chercheurs ont décidés de comparer 2 profils (1) et (2) qui possèdent la même corde  $c = c_1 = c_2$  et la même envergure  $L$  (longueur perpendiculaire au dessin du profil) mais pas forcément la même forme donc pas forcément la même épaisseur. Les chercheurs ont choisi de prendre comme surface  $S = cL$  ce qui peut paraître curieux : ils auraient pû prendre  $eL$  mais les 2 profils n'ayant pas les mêmes épaisseurs, la comparaison n'aurait pas été aisée<sup>9</sup>.

On a, pour ces 2 profils qui ont même corde  $c$ , même envergure  $L$  et qui évolue à la même vitesse  $V$ , les relations suivantes :

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{2}\rho LcC_{z1}V^2 & T_1 &= \frac{1}{2}\rho LcC_{x1}V^2 \\ P_2 &= \frac{1}{2}\rho LcC_{z2}V^2 & T_2 &= \frac{1}{2}\rho LcC_{x2}V^2 \end{aligned}$$

---

<sup>5</sup>Un volume de fluide possède une énergie

<sup>6</sup>Une petite bille de masse  $m$  qui va à la vitesse  $V$  possède une énergie cinétique  $\frac{1}{2}mV^2$ .

<sup>7</sup>Cette dernière phrase est incorrecte car, quand on fait du vélo, la pression qui règne en chaque point de notre corps n'est pas la même : elle est inférieure à  $\frac{1}{2}\rho V^2$  sauf en 1 point. On sent mieux ce point quand un jet d'eau frappe notre main ...

<sup>8</sup>ne pas confondre avec la corde  $c$

<sup>9</sup>Il y a une autre raison logique du choix de cette surface ...

A l'aide d'expériences et en mesurant les forces, on en déduit les coefficients aérodynamiques et on en déduit le profil le plus porteur ou le moins trainant ou ...

Revenons à la comparaison du même profil de 2 cordes différentes évoluant à 2 vitesses différentes mais au même nombre de Reynolds. Effectuons la comparaison des portances de ces 2 profils :

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{1}{2}\rho L c_1 C_{z1} V_1^2}{\frac{1}{2}\rho L c_2 C_{z2} V_2^2} = \frac{C_{z1}}{C_{z2}} \frac{c_1}{c_2} \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2$$

En comparant avec la relation (1) on en déduit  $C_{z1} = C_{z2}$ .

En comparant les trainées de ces 2 profils, on en déduit  $C_{x1} = C_{x2}$ . Ces relations sont vraies car  $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$ .

Les coefficients aérodynamiques d'un profil sont donc fonction du nombre de Reynolds ( $C_x(\mathcal{R})$  et  $C_z(\mathcal{R})$ ) qui lui même est fonction de la corde et de la vitesse<sup>10</sup>.

De plus, un profil d'aile peut posséder une incidence  $i$  (angle entre la corde et la direction du vent). Les coefficients aérodynamiques dépendent de cet angle ( $C_x(\mathcal{R}, i)$  et  $C_z(\mathcal{R}, i)$ ).

$\mathcal{R} = 18000 - i = 0^\circ$	
Profil 1	Profil 2
$e_1 = 3.5 \text{ mm}$	$e_2 = 4.0 \text{ mm}$
$c_1 = 27.80 \text{ mm}$	$c_2 = \frac{e_2}{e_1} = 31.77 \text{ mm}$
$V_1 = \mathcal{R} \frac{v}{c_1} = 9.71 \text{ m.s}^{-1}$	$V_2 = \mathcal{R} \frac{v}{c_2} = 8.49 \text{ m.s}^{-1}$
$C_z = 0.1801$ (obtenu par logiciel de simulation)	
$C_x = 0.04456$ (obtenu par logiciel de simulation)	
$P_1 = 0.2928 \text{ N.m}^{-1}$	$P_2 = 0.2562 \text{ N.m}^{-1}$
$T_1 = 0.0724 \text{ N.m}^{-1}$	$T_2 = 0.0634 \text{ N.m}^{-1}$

On peut donc présenter suite à des expériences ou des calculs par ordinateur<sup>11</sup> les courbes donnant l'évolution des coefficients aérodynamiques en fonction du nombre de Reynolds et de l'incidence du profil (cf FIG. 2 et FIG. 3).

En examinant (cf FIG. 2) uniquement la plage d'incidence  $i \in [-1^\circ : +1^\circ]$ , si pour  $\mathcal{R} = 30000$  le coefficient de trainée est quasiment constant  $C_x \approx 0.04$ , pour  $\mathcal{R} = 18000$  le coefficient de trainée augmente énormément pour une incidence positive. Une faible modification de l'incidence - pour  $\mathcal{R} = 18000$  - engendrera une forte modification des caractéristiques de ce profil.

De même, en examinant (cf FIG. 3) uniquement la plage d'incidence  $i \in [0 : +1^\circ]$ , pour  $\mathcal{R} = 30000$  le coefficient de portance  $C_z$  augmente régulièrement de 0.3 à 0.4 alors que pour  $\mathcal{R} = 18000$  le coefficient de portance  $C_z$  augmente brutalement du simple au double (de moins de 0.2 à plus de 0.4). Une faible modification de l'incidence - pour  $\mathcal{R} = 18000$  - engendrera une forte modification des caractéristiques de ce profil.

On a pris l'habitude de présenter la courbe  $C_z$  en fonction de  $C_x$  (cf FIG. 4) pour un nombre de Reynolds donné : chaque point de la courbe correspondant à une incidence différente. On peut présenter sur le même graphe plusieurs courbes, chaque courbe correspondant à un nombre de Reynolds différent.

N.B. Sur ces courbes (FIG. 2 à FIG. 4), on peut voir quelques évolutions brutales. La physique "n'aime pas" les variations brutales. Si l'on raffine les calculs, ces variations brutales seront moins remarquables.

<sup>10</sup>On aurait pu dire que les coefficients aérodynamiques d'un profil sont fonction de la corde ou de la vitesse.

<sup>11</sup>simulation d'écoulement autour d'un profil

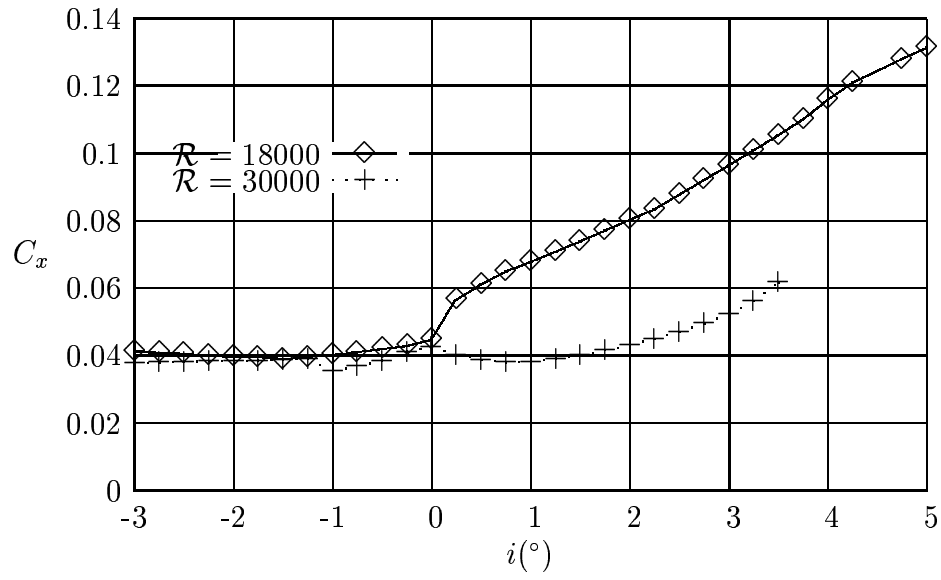


FIG. 2 – Evolution du coefficient de trainée  $C_x$  en fonction de l'incidence  $i$  du profil pour 2 nombres de Reynolds.

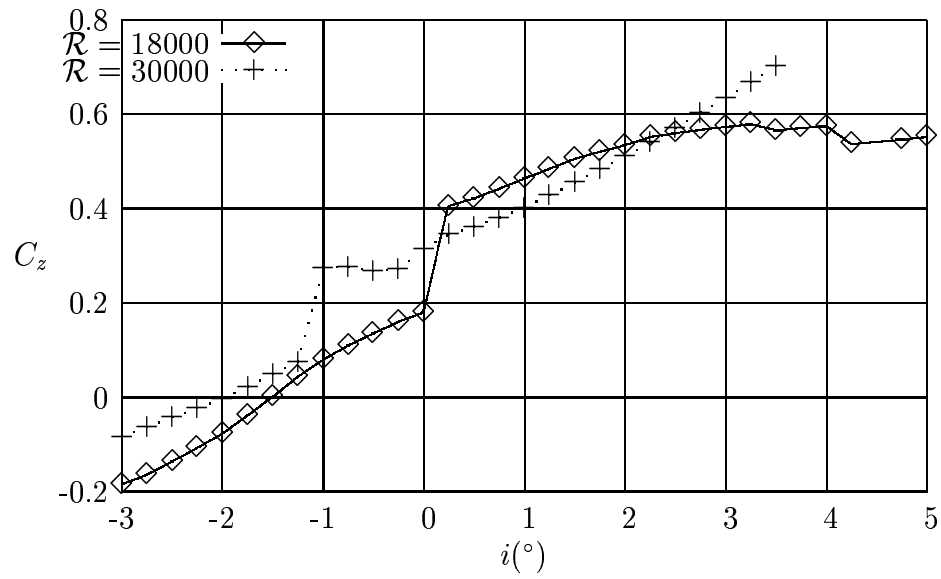


FIG. 3 – Evolution du coefficient de portance  $C_z$  en fonction de l'incidence  $i$  du profil pour 2 nombres de Reynolds.

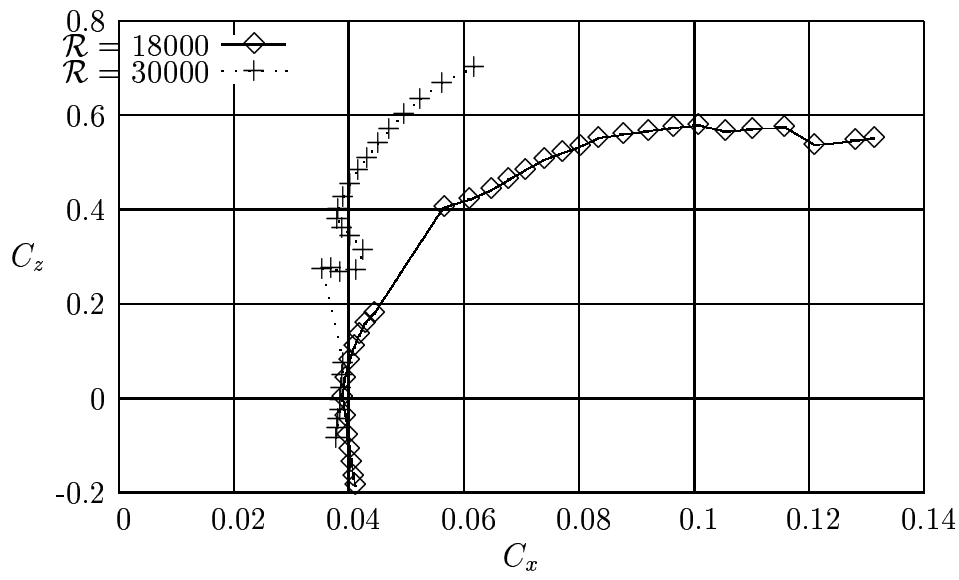


FIG. 4 – Evolution du coefficient de portance  $C_z$  en fonction du coefficient de trainée  $C_x$  lorsque l'incidence évolue de  $-3^\circ$  à  $+5^\circ$  pour 2 nombres de Reynolds (la difficulté de cette courbe est que l'on ne sait pas facilement à quelle incidence correspond un point de cette courbe).

Le fait de parler en nombre de Reynolds et non en taille du profil ou en vitesse peut paraître obscur. A un nombre de Reynolds correspond différents couples de valeur de taille de profil et de vitesse.

épaisseur $e$	corde $c$	$\mathcal{R} = 18000$				$\mathcal{R} = 30000$			
		Vitesse $V$		$P$	$T$	Vitesse $V$		$P$	$T$
		(m.s <sup>-1</sup> )	(km.h <sup>-1</sup> )	N/m		(m.s <sup>-1</sup> )	(km.h <sup>-1</sup> )	N/m	
2.0	15.8	17.0	61.2	0.51	0.127	28.3	102.1	2.48	0.33
3.0	23.8	11.3	40.8	0.34	0.084	18.9	68.0	1.65	0.224
3.2	25.3	10.6	38.3	0.32	0.079	17.7	63.8	1.55	0.210
3.5	27.7	9.7	35.0	0.29	0.072	16.2	58.3	1.42	0.192
4.0	31.7	8.5	30.6	0.25	0.063	14.2	51.0	1.24	0.168

Effectuons un autre calcul. Comparons 2 profils identiques mais de taille différente qui subissent le même vent  $V_1 = V_2 = 16 \text{ m.s}^{-1}$  pour une incidence nulle ( $i = 0^\circ$ ).

On remarque logiquement que le profil le plus large subit la portance la plus élevée (Attention : l'aérodynamique peut nous jouer des surprises et cette logique peut ne pas être vérifiée dans tous les cas).

Le rapport entre la portance et la trainée  $\frac{P}{T}$  se nomme la finesse. Plus la finesse est élevée, meilleur est le compromis entre la portance et la trainée ...

	Profil 1	Profil 2
$V \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$	16	16
$\mathcal{R}$	30000	18000
$e \text{ (mm)}$	3.54	2.12
$c \text{ (mm)}$	28.13	16.88
$\frac{1}{2}\rho c V^2 \text{ (N/m)}$	4.46	2.68
$C_x$	0.04248	0.04456
$C_z$	0.3138	0.1801
$P \text{ (N/m)}$	1.40	0.48
$T \text{ (N/m)}$	0.19	0.12
$\frac{P}{T}$	7.38	4.04