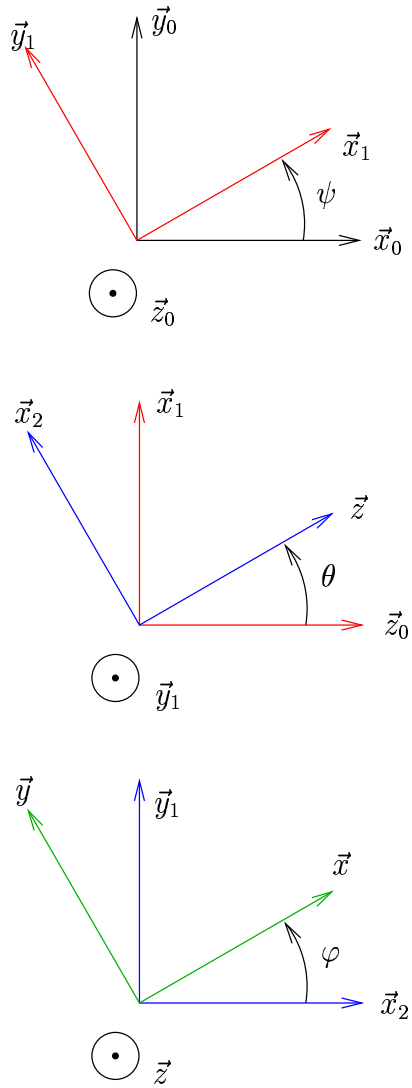
Mouvement simplifié d'un tripale

3 octobre 2003

1 Hypothèses - Position du problème

$$
\begin{array}{lcl}
R_0 & : & (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \\
 & \downarrow & \vec{OG} \\
 & & (G, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \\
 & \downarrow & (\psi(t), \vec{z}_0) \\
R_1 & : & (G, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0) \\
 & \downarrow & (\theta, \vec{y}_1) \\
R_2 & : & (G, \vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}) \\
 & \downarrow & (\varphi, \vec{z}) \\
S & : & (G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})
\end{array}
$$



- Le vol s'effectue à une altitude variable h mais suivant une trajectoire circulaire de rayon R ;
- L'inclinaison du tripale (S) par rapport à l'horizontale est constante $(\widehat{\vec{z}_0, \vec{z}}) = \theta$;
- D'autres hypothèses au fil du texte.

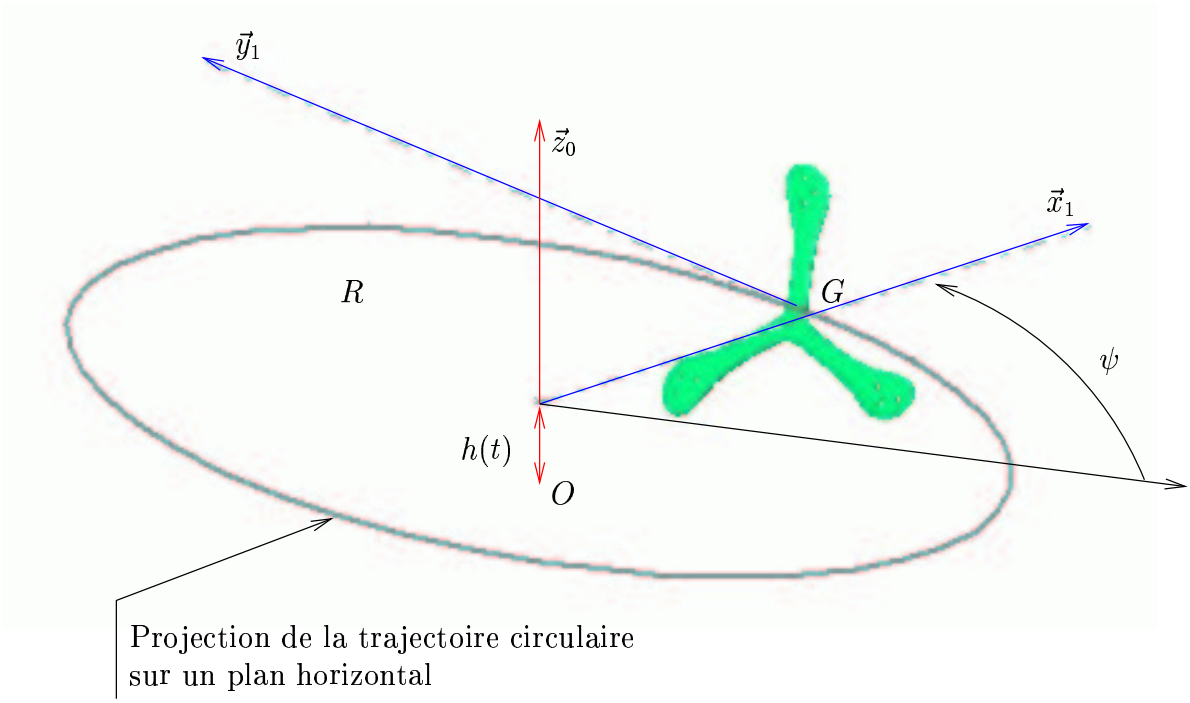
Le repère $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est fixe par rapport à (S). $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est déduit de la rotation propre d'angle φ autour de $\vec{z}$ du repère $(G, \vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z})$.

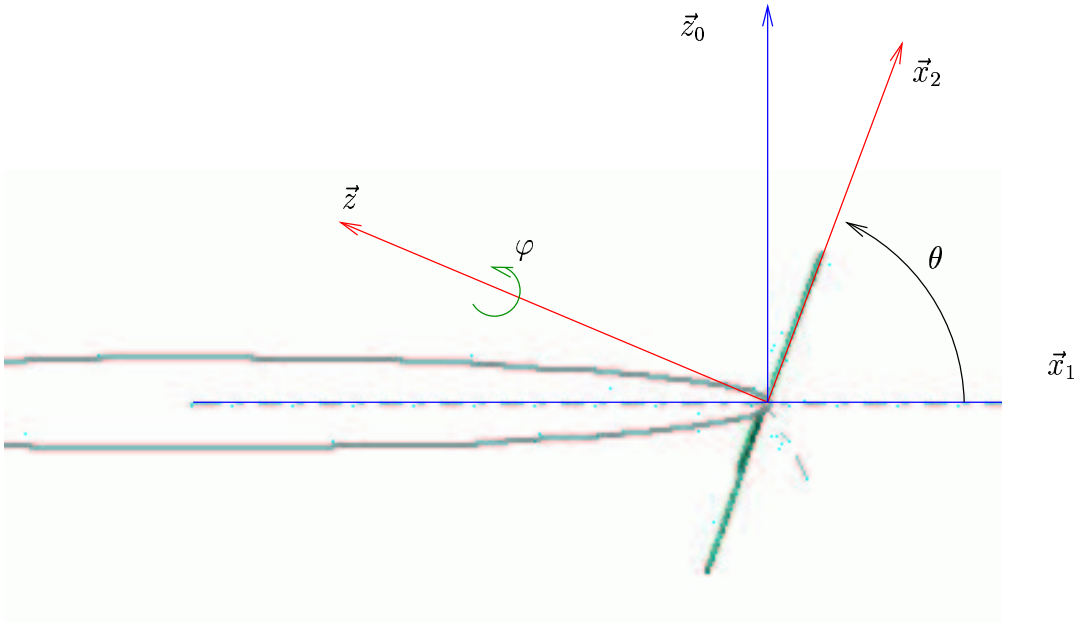
Le repère $(G, \vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z})$ est déduit de l'inclinaison par rapport à l'horizontale θ autour de $\vec{y}_1$ du repère $(G, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$.

Le repère $(G, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ est déduit d'une rotation d'angle ψ autour de $\vec{z}_0$ du repère $(G, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Le repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est fixe par rapport au sol : le point O est le centre de la trajectoire circulaire. Le centre de gravité G du tripale est positionné par :

$$\vec{OG} = h(t)\vec{z}_0 + R\vec{x}_1 \qquad \text{où } R \text{ est constant}$$





2 Enumération des actions exercées sur le tripale (S)

– Action de l'air sur (S) :

$$\{air \to S\} : \left\{ \begin{array}{l} \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2}\rho C_x \Omega V A \\ \frac{3}{2}\rho C_z \left[\Omega^2 I + \frac{1}{2}V^2 S\right] \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2,\vec{y}_1,\vec{z})} \\ \\ \vec{\mathbb{M}}(G, air \to S) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2}\rho C_z \Omega V I \\ -\frac{3}{2}\rho C_x \left[\Omega^2 Q + \frac{1}{2}V^2 A\right] \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2,\vec{y}_1,\vec{z})} \end{array} \right.$$

où $S = \int_{r_0}^{R} \mathrm{d}S$, $A = \int_{r_0}^{R} r\,\mathrm{d}S$, $I = \int_{r_0}^{R} r^2\,\mathrm{d}S$ et $Q = \int_{r_0}^{R} r^3\,\mathrm{d}S$ sont fonction des caractéristiques géométriques du tripale.

$\Omega = \dot{\varphi}$, $V = R\dot{\psi}$ sans considérer la vitesse verticale $\dot{h}$ (hypothèse)

La composante $\vec{F}\cdot\vec{y}_1$ freine le mouvement de translation, les composantes $\vec{F}\cdot\vec{z}$ et $\vec{\mathbb{M}}(G, air \to S)\cdot\vec{y}_1$ créent l'effet gyroscopique et la composante $\vec{\mathbb{M}}(G, air \to S)\cdot\vec{z}$ freine la rotation propre.

– Action de la pesanteur sur (S) connue :

$$\{pes \to S\} : \left\{ \begin{array}{l} -mg\vec{z}_0 \\ \vec{\mathbb{M}}(G, pes \to S) = \vec{0} \end{array} \right\}$$

3 Equations du Principe Fondamental de la Dynamique

Le **P.F.D.** s'écrit à (S) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F} - mg\vec{z}_0 = m\vec{\Gamma}(G/R_0) \\ \vec{\mathbb{M}}(G, air \to S) + \vec{\mathbb{M}}(G, pes \to S) = \vec{\delta}(G, S/R_0) = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\sigma}(G, S/R_0)}{\mathrm{d}t_{R_0}} \end{array} \right.$$

On projette alors ces 2 équations vectorielles sur des vecteurs indépendants pour obtenir des équations scalaires, à savoir :

$$\begin{aligned}
\vec{F}\cdot\vec{x}_2 - mg\vec{z}_0\cdot\vec{x}_2 &= m\vec{\Gamma}(G/R_0)\cdot\vec{x}_2 && (1)\\
\vec{F}\cdot\vec{y}_1 - mg\vec{z}_0\cdot\vec{y}_1 &= m\vec{\Gamma}(G/R_0)\cdot\vec{y}_1 && (2)\\
\vec{F}\cdot\vec{z} - mg\vec{z}_0\cdot\vec{z} &= m\vec{\Gamma}(G/R_0)\cdot\vec{z} && (3)\\
\vec{\mathbb{M}}(G, air \to S)\cdot\vec{x}_2 = \vec{\delta}(G, S/R_0)\cdot\vec{x}_2 &= \frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}(G, S/R_0)}{\mathrm{d}t_{R_0}}\cdot\vec{x}_2 && (4)\\
\vec{\mathbb{M}}(G, air \to S)\cdot\vec{y}_1 = \vec{\delta}(G, S/R_0)\cdot\vec{y}_1 &= \frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}(G, S/R_0)}{\mathrm{d}t_{R_0}}\cdot\vec{y}_1 && (5)\\
\vec{\mathbb{M}}(G, air \to S)\cdot\vec{z} = \vec{\delta}(G, S/R_0)\cdot\vec{z} &= \frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}(G, S/R_0)}{\mathrm{d}t_{R_0}}\cdot\vec{z} && (6)
\end{aligned}$$

où :

$$\vec{z}_0\cdot\vec{x}_2 = -\sin\theta \quad ; \quad \vec{z}_0\cdot\vec{y}_1 = 0 \quad ; \quad \vec{z}_0\cdot\vec{z} = \cos\theta$$

4 Equations de la résultante du P.F.D.

Calculons l'accélération $\vec{\Gamma}(G/R_0)$ à partir de la vitesse $\vec{V}(G/R_0)$:

$$\vec{V}(G/R_0) = \frac{\mathrm{d}\vec{O}M}{\mathrm{d}t_{R_0}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_{R_0}}(h\vec{z}_0 + R\vec{x}_1) = \dot{h}\vec{z}_0 + R\dot{\psi}\vec{y}_1$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{\Gamma}(G/R_0) = \frac{\mathrm{d}\vec{V}(G/R_0)}{\mathrm{d}t_{R_0}} = R(\ddot{\psi}\vec{y}_1 - \dot{\psi}^2\vec{x}_1) + \ddot{h}\vec{z}_0 = \begin{pmatrix} -R\dot{\psi}^2\cos\theta - \ddot{h}\sin\theta \\ R\ddot{\psi} \\ -R\dot{\psi}^2\sin\theta + \ddot{h}\cos\theta \end{pmatrix}_{(B_2)=(\vec{x}_2,\vec{y}_1,\vec{z}_0)}$$

$$(1) \quad \Longrightarrow \quad mg\sin\theta = -m[R\dot{\psi}^2\cos\theta + \ddot{h}\sin\theta] \quad \Longrightarrow \quad g\sin\theta = -[R\dot{\psi}^2\cos\theta + \ddot{h}\sin\theta]$$

$$(2) \quad \Longrightarrow \quad -\frac{3}{2}\rho C_x\dot{\varphi}R\dot{\psi}A = -mR\dot{\psi}^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{3}{2}\rho C_x\dot{\varphi}A = mR\ddot{\psi}$$

$$(3) \quad \Longrightarrow \quad \frac{3}{2}\rho C_z\left[\dot{\varphi}^2 I + \frac{1}{2}R^2\dot{\psi}^2 S\right] - mg\cos\theta = m[-R\dot{\psi}^2\sin\theta + \ddot{h}\cos\theta]$$

En considérant que l'accélération verticale $\ddot{h}$ est très faible et que $\theta \approx -90°$ donc que $\cos\theta \approx 0$, on simplifie _ en partie _ les précédentes équations :

$$(1) \quad \Longrightarrow \quad -g\sin\theta = R\dot{\psi}^2\cos\theta + \ddot{h}\sin\theta$$

$$(2) \quad \Longrightarrow \quad \frac{3}{2}\rho C_x\dot{\varphi}A = mR\ddot{\psi}$$

$$(3) \quad \Longrightarrow \quad \frac{3}{2}\rho C_z\left[\dot{\varphi}^2 I + \frac{1}{2}R^2\dot{\psi}^2 S\right] - mg\cos\theta = m[-R\dot{\psi}^2\sin\theta]$$

Intérêt de ces équations :

A noter que l'angle θ est négatif d'où $\sin\theta < 0$ et $\tan\theta < 0$.
L'équation (1) nous donne l'accélération verticale $\ddot{h}$ qui peut éventuellement être nulle si le terme $\frac{R\dot{\psi}^2}{|\tan\theta|}$ compense l'accélération de la pesanteur g.

$$(1) \quad \Longrightarrow \quad -g - \frac{R\dot{\psi}^2}{\tan\theta} = \ddot{h} \quad \Longrightarrow \quad \ddot{h} = \frac{R\dot{\psi}^2}{|\tan\theta|} - g$$

L'équation (2) nous donne la décélération angulaire $\ddot{\psi}$ qui doit être la plus faible possible d'où entre autre la minimisation indispensable du C_x.

$$\ddot{\psi} = \frac{3}{2}\frac{\rho C_x\dot{\varphi}A}{mR}$$

L'équation (3) permet de relier $\dot{\psi}$ et $\dot{\varphi}$.

5 Equations du moment du P.F.D.

Calculons le moment cinétique $\vec{\sigma}(G, S/R_0)$ à partir de la matrice d'inertie de (S) :

$$\vec{\sigma}(G, S/R_0) = \bar{\bar{\mathcal{I}}}(G, S)\vec{\Omega}(S/R_0)$$

$$\text{où} \qquad \vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\psi}\vec{z}_0 + \dot{\varphi}\vec{z} = \dot{\psi}(\cos\theta\vec{z} - \sin\theta\vec{x}_2) + \dot{\varphi}\vec{z} = \begin{pmatrix} -\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \\ \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi \\ \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} \end{pmatrix}_{(B)=(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\text{et} \qquad \bar{\bar{\mathcal{I}}}(G,S) = \begin{pmatrix} I & -F & \approx 0 \\ -F & J & \approx 0 \\ \approx 0 & \approx 0 & K \end{pmatrix}_{(B)=(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \qquad \text{où } I + J \approx K \text{ (faible épaisseur de boom)}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{\sigma}(G,S/R_0) = \begin{pmatrix} I & -F & 0 \\ -F & J & 0 \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}_{(B)} \begin{pmatrix} -\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \\ \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi \\ \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} \end{pmatrix}_{(B)} = \begin{pmatrix} -\dot{\psi}\sin\theta(I\cos\varphi + F\sin\varphi) \\ \dot{\psi}\sin\theta(F\cos\varphi + J\sin\varphi) \\ K(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}) \end{pmatrix}_{(B)}$$

Première partie

$\theta \approx -90°$

Hypothèse : Considérons le cas où le tripale est vertical, c-à-d θ est proche de $-90°$: on a alors $\cos\theta \approx 0$ et $\sin\theta \approx -1$.

$$\vec{\sigma}(G,S/R_0) \approx \begin{pmatrix} \dot{\psi}(I\cos\varphi + F\sin\varphi) \\ -\dot{\psi}(F\cos\varphi + J\sin\varphi) \\ K\dot{\varphi} \end{pmatrix}_{(B)}$$

5.1 projection sur $\vec{y}_1$

On doit calculer :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}(G,S/R_0)}{\mathrm{d}t_{R_0}} \cdot \vec{y}_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\sigma}(G,S/R_0)\cdot\vec{y}_1) - \vec{\sigma}(G,S/R_0)\cdot\underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{y}_1}{\mathrm{d}t_{R_0}}}_{-\dot{\psi}\vec{x}_1}$$

Effectuons les 2 calculs intermédiaires :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(G,S/R_0)\cdot\vec{y}_1 &= \begin{pmatrix} \dot{\psi}(I\cos\varphi + F\sin\varphi) \\ -\dot{\psi}(F\cos\varphi + J\sin\varphi) \\ K\dot{\varphi} \end{pmatrix}_{(B)} \cdot \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}_{(B)} \\ &= \dot{\psi}(I\cos\varphi + F\sin\varphi)\sin\varphi - \dot{\psi}(F\cos\varphi + J\sin\varphi)\cos\varphi \end{aligned}$$

$$\text{et} \qquad \vec{\sigma}(G,S/R_0)\cdot\vec{x}_1 \approx -\vec{\sigma}(G,S/R_0)\cdot\vec{z} = -K\dot{\varphi}$$

on a alors :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}(G,S/R_0)}{\mathrm{d}t_{R_0}} \cdot \vec{y}_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dot{\psi}(I\cos\varphi + F\sin\varphi)\sin\varphi - \dot{\psi}(F\cos\varphi + J\sin\varphi)\cos\varphi\right] - K\dot{\varphi}\dot{\psi}$$

Le premier terme n'est pas forcément nul mais si on le néglige on a :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}(G,S/R_0)}{\mathrm{d}t_{R_0}} \cdot \vec{y}_1 = -K\dot{\varphi}\dot{\psi}$$

Il faut alors relancer cette relation simplifiée dans l'équation (5) du **P.F.D.** .

$$(5) \quad \Longrightarrow \quad \vec{M}(G, air \to S) \cdot \vec{y}_1 = \frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}(G, S/R_0)}{\mathrm{d}t_{R_0}} \cdot \vec{y}_1$$

$$-\frac{3}{2}\rho C_z \dot{\varphi} R \dot{\psi} I = -K\dot{\varphi}\dot{\psi} \quad \Longrightarrow \quad \frac{3}{2}\rho C_z R I = K \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{2}{3}\frac{K}{\rho C_z I}$$

Ce qui nous donne la portée du tripale : $\boxed{2R = \frac{4}{3}\frac{K}{\rho C_z I}}$

5.2 projection sur $\vec{x}_2$

On doit calculer :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}(G, S/R_0)}{\mathrm{d}t_{R_0}} \cdot \vec{x}_2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\sigma}(G, S/R_0) \cdot \vec{x}_2) - \vec{\sigma}(G, S/R_0) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{x}_2}{\mathrm{d}t_{R_0}}$$

où :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}_2}{\mathrm{d}t_{R_0}} = \dot{\psi}\vec{z}_0 \wedge \vec{x}_2 = \dot{\psi}\underbrace{\cos\theta}_{=0}\vec{y}_1 = \vec{0}$$

Effectuons le calcul intermédiaire :

$$\begin{aligned}
\vec{\sigma}(G, S/R_0) \cdot \vec{x}_2 &= \begin{pmatrix} \dot{\psi}(I\cos\varphi + F\sin\varphi) \\ -\dot{\psi}(F\cos\varphi + J\sin\varphi) \\ K\dot{\varphi} \end{pmatrix}_{(B)} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}_{(B)} \\
&= \dot{\psi}(I\cos\varphi + F\sin\varphi)\cos\varphi + \dot{\psi}(F\cos\varphi + J\sin\varphi)\sin\varphi \\
&= \dot{\psi}(I\cos^2\varphi + 2F\sin\varphi\cos\varphi + J\sin^2\varphi)
\end{aligned}$$

on a alors :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}(G, S/R_0)}{\mathrm{d}t_{R_0}} \cdot \vec{x}_2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dot{\psi}(I\cos^2\varphi + 2F\sin\varphi\cos\varphi + J\sin^2\varphi)\right]$$

Il faut alors relancer cette relation dans l'équation (4) du **P.F.D.** :

$$(4) \quad \Longrightarrow \quad \vec{M}(G, air \to S) \cdot \vec{x}_2 = \frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}(G, S/R_0)}{\mathrm{d}t_{R_0}} \cdot \vec{x}_2$$

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dot{\psi}(I\cos^2\varphi + 2F\sin\varphi\cos\varphi + J\sin^2\varphi)\right]$$

On s'aperçoit que cette équation n'a aucune raison d'être vérifiée quelque soit l'angle φ. Cela signifie que les hypothèses effectuées sont trop nombreuses pour que les différentes conclusions soient exactes.

5.3 projection sur $\vec{z}$

On doit calculer :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}(G, S/R_0)}{\mathrm{d}t_{R_0}} \cdot \vec{z} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\underbrace{\vec{\sigma}(G, S/R_0) \cdot \vec{z}}_{K\dot{\varphi}}) - \vec{\sigma}(G, S/R_0) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{z}}{\mathrm{d}t_{R_0}}$$

où :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{z}}{\mathrm{dt}_{R_0}} = \dot{\psi}\vec{z}_0 \wedge \vec{z} = \dot{\psi}\underbrace{\sin\theta}_{=1}\vec{y}_1 = \dot{\psi}\begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}_{(B)}$$

on a alors :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}(G, S/R_0)}{\mathrm{dt}_{R_0}} \cdot \vec{z} \;=\; K\ddot{\varphi} + \dot{\psi}^2(I\cos\varphi + F\sin\varphi)\sin\varphi - \dot{\psi}^2(F\cos\varphi + J\sin\varphi)\cos\varphi$$

Il faut alors relancer cette relation dans l'équation (6) du **P.F.D.** .

$$(6) \quad \Longrightarrow \quad \vec{M}(G, air \to S) \cdot \vec{z} = \frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}(G, S/R_0)}{\mathrm{dt}_{R_0}} \cdot \vec{z}$$

$$-\frac{3}{2}\rho C_x\left[\dot{\varphi}^2 Q + \frac{1}{2}R^2\dot{\psi}^2 A\right] = K\ddot{\varphi} + \dot{\psi}^2[(I-J)\cos\varphi\sin\varphi + F(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)]$$

Cette équation nous permet d'obtenir la décélération $\ddot{\varphi}$ angulaire propre du tripale connaissant ces vitesses de rotation et ces autres caractéristiques.

Intérêt de ces équations :

(5) donne la portée du tripale soit $2R$. (6) donne la décélération angulaire propre $\ddot{\varphi}$. (4) n'est pas vérifiée car il y a trop d'hypothèses non vérifiées (trajectoire non circulaire, θ constant, C_x et C_z constants sur toute la pale, position du centre de poussée sur le profil, ...).

Deuxième partie

$|\theta| < 90°$

Le but étant de déterminer la portée du tripale qui sera estimée par $2R$, revenons à l'équation (5) lorsque $\theta \neq 90°$.

$$\vec{\sigma}(G, S/R_0) = \begin{pmatrix} -\dot{\psi}\sin\theta(I\cos\varphi + F\sin\varphi) \\ \dot{\psi}\sin\theta(F\cos\varphi + J\sin\varphi) \\ K(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}) \end{pmatrix}_{(B)} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix}_{(B)}$$

On doit calculer :

$$\vec{\delta}(G, S/R_0) \cdot \vec{y}_1 = \frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}(G, S/R_0)}{\mathrm{dt}_{R_0}} \cdot \vec{y}_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\sigma}(G, S/R_0) \cdot \vec{y}_1) - \vec{\sigma}(G, S/R_0) \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{y}_1}{\mathrm{dt}_{R_0}}}_{-\dot{\psi}\vec{x}_1}$$

Effectuons les 2 calculs intermédiaires :

$$\vec{\sigma}(G, S/R_0) \cdot \vec{y}_1 \;=\; \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix}_{(B)} \cdot \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}_{(B)} = \sigma_1\sin\varphi + \sigma_2\cos\varphi$$

$$\vec{\sigma}(G, S/R_0) \cdot \vec{x}_1 \;=\; \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix}_{(B)} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ -\cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta \end{pmatrix}_{(B)} = \sigma_1\cos\theta\cos\varphi - \sigma_2\cos\theta\sin\varphi + \sigma_3\sin\theta$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}(G,S/R_0)}{\mathrm{d}t_{R_0}}\cdot\vec{y}_1 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sigma_1\sin\varphi+\sigma_2\cos\varphi)+\dot{\psi}(\sigma_1\cos\theta\cos\varphi-\sigma_2\cos\theta\sin\varphi+\sigma_3\sin\theta)\\
&= \dot{\sigma}_1\sin\varphi+\sigma_1\dot{\varphi}\cos\varphi+\dot{\sigma}_2\cos\varphi-\sigma_2\dot{\varphi}\sin\varphi+\ldots\\
&\quad +\dot{\psi}(\sigma_1\cos\theta\cos\varphi-\sigma_2\cos\theta\sin\varphi+\sigma_3\sin\theta)
\end{aligned}$$

Considérons $\dot{\psi}$ constant pour calculer $\dot{\sigma}_1$ et $\dot{\sigma}_2$.

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_1 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma_1=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[-\dot{\psi}\sin\theta(I\cos\varphi+F\sin\varphi)]=\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta(I\sin\varphi-F\cos\varphi)\\
\dot{\sigma}_2 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma_2=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\dot{\psi}\sin\theta(F\cos\varphi+J\sin\varphi)]=\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta(-F\sin\varphi+J\cos\varphi)
\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\vec{\delta}(G,S/R_0)\cdot\vec{y}_1 &= \dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta(I\sin\varphi-F\cos\varphi)\sin\varphi-\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta(I\cos\varphi+F\sin\varphi)\cos\varphi\\
&\quad +\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta(-F\sin\varphi+J\cos\varphi)\cos\varphi-\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta(F\cos\varphi+J\sin\varphi)\sin\varphi\\
&\quad -\dot{\psi}^2\sin\theta(I\cos\varphi+F\sin\varphi)\cos\theta\cos\varphi-\dot{\psi}^2\sin\theta(F\cos\varphi+J\sin\varphi)\cos\theta\sin\varphi\\
&\quad +K\dot{\psi}(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})\sin\theta\\
&= \dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta[(I-J)\sin^2\varphi-4F\sin\varphi\cos\varphi+(J-I)\cos^2\varphi]\\
&\quad -\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta[(I\cos\varphi+F\sin\varphi)\cos\varphi+(F\cos\varphi+J\sin\varphi)\sin\varphi]\\
&\quad +K\dot{\psi}(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})\sin\theta\\
&= \dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta[(I-J)(\sin^2\varphi-\cos^2\varphi)-4F\sin\varphi\cos\varphi]\\
&\quad -\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta(I\cos^2\varphi+2F\sin\varphi\cos\varphi+J\sin^2\varphi)\\
&\quad +K\dot{\psi}^2\cos\theta\sin\theta+K\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta\\
&= \dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta[K+(I-J)(\sin^2\varphi-\cos^2\varphi)-4F\sin\varphi\cos\varphi]\\
&\quad +\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta(K-I\cos^2\varphi-2F\sin\varphi\cos\varphi-J\sin^2\varphi)
\end{aligned}$$

$\vec{\delta}(G,S/R_0)\cdot\vec{y}_1$ évolue en fonction de l'angle de rotation propre φ. La valeur moyenne de $\vec{\delta}(G,S/R_0)\cdot\vec{y}_1$ sur 1 tour en φ est du fait de :

$$\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\pi \qquad ; \qquad \int_0^{2\pi}\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi=0$$

$$\begin{aligned}
(\vec{\delta}(G,S/R_0)\cdot\vec{y}_1)_{moy} &= \dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta[K+(I-J)(\pi-\pi)]+\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta(K-I\pi-J\pi)\\
&= K\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta+\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta[K-\pi(I+J)]\\
&= \dot{\psi}\sin\theta(K\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta[K-\pi(I+J)])
\end{aligned}$$

Du fait de la faible épaisseur du boom $(I+J)\approx K$.
Du fait que $\theta\approx-90°$ $\implies$ $\cos\theta\approx 0$ et que $\dot{\psi}\ll\dot{\varphi}$ on peut faire l'hypothèse que :

$$\dot{\psi}\cos\theta[K-\pi(I+J)]\ll K\dot{\varphi}$$

Ce qui nous ramène à :

$$(\vec{\delta}(G,S/R_0)\cdot\vec{y}_1)_{moy}\approx K\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta$$

En utilisant l'équation (5) du **P.F.D.** il vient :

$$-\frac{3}{2}\rho C_z\dot{\varphi}R\dot{\psi}I=K\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta \quad\implies\quad \frac{3}{2}\rho C_z RI=K\sin(-\theta)$$

ce qui nous permet d'obtenir le rayon R donc la portée $2R$:

$$\text{Portée} = 2R = \frac{4K(-\sin\theta)}{\rho(3I)C_z} = \frac{4K\sin(-\theta)}{\rho(3I)C_z}$$

Rem :

Inclinaison par rapport à la verticale (°)	θ (°)
10	-80
20	-70
30	-60
40	-50

6 Tripale homogène

Dans le cas où le boom est homogène (c-à-d non plombé) le moment d'inertie K est relié au moment quadratique $3I$ _ en supposant avoir négliger l'usinage du profil _ par :

$K = \rho_0 e(3I)$ où ρ_0 est la masse volumique du matériau du boom et e son épaisseur constante.

et dans ce cas on obtient :

$$\text{Portée} = 2R = \frac{4\rho_0 e\sin(-\theta)}{\rho C_z}$$

Conclusion : D'après cette relation, les portées de différents tripales homogènes (non plombés, ni trous) fabriqués dans le même matériau ρ_0 avec la même épaisseur e ne peuvent être différentes que si θ et C_z sont différents. Qu'en pensez vous ?

A.N. Pour l'air : $\rho = 1.2$ kg.m^{-3}

Polypro : $e = 4$ mm, $\rho = 920$ kg.m^{-3}		
	$C_z = 0.4$	$C_z = 0.5$
$-\theta$	Portée (m)	Portée (m)
50	23,5	18,8
60	26,6	21,2
70	28,8	23,1
80	30,2	24,2
90	30,7	24,5

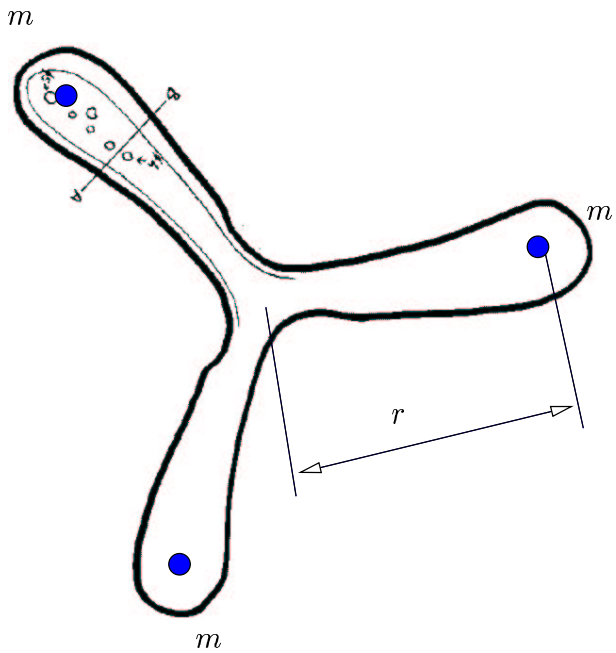
CPL Bouleau : $e = 4$ mm, $\rho = 750$ kg.m^{-3}		
	$C_z = 0.4$	$C_z = 0.5$
$-\theta$	Portée (m)	Portée (m)
50	19,2	15,3
60	21,7	17,3
70	23,5	18,8
80	24,6	19,7
90	25,0	20,0

Bakélite : $e = 2$ mm, $\rho = 1100$ kg.m^{-3}		
	$C_z = 0.2$	$C_z = 0.4$
$-\theta$	Portée (m)	Portée (m)
50	28,1	14,0
60	31,8	15,9
70	34,5	17,2
80	36,1	18,1
90	36,7	18,3

Bakélite : $e = 2.5$ mm, $\rho = 1100$ kg.m^{-3}		
	$C_z = 0.2$	$C_z = 0.4$
$-\theta$	Portée (m)	Portée (m)
50	35,1	17,6
60	39,7	19,8
70	43,1	21,5
80	45,1	22,6
90	45,8	22,9

Il faut faire attention aux valeurs précédentes qui peuvent sembler proches de la réalité car elles sont obtenues avec une valeur de C_z complètement approximative. De plus pour obtenir le modèle d'effort sur le boom, on a supposé C_z constant.

7 Tripale plombé



Pour un tripale plombé par 3 masses m situées à la même distance r du CG le nouveau moment d'inertie est $K' = \rho_0 e(3I) + 3mr^2$ et la nouvelle portée est :

$$\text{Portée}' = \frac{4K'\sin(-\theta)}{\rho(3I)C_z} = \underbrace{\frac{4\rho_0 e(3I)\sin(-\theta)}{\rho(3I)C_z}}_{\text{Portée (non plombé)}} + \underbrace{\frac{4(3mr^2)\sin(-\theta)}{\rho(3I)C_z}}_{\text{Augmentation de Portée : } \Delta P}$$

Si l'on s'intéresse à l'augmentation de la portée du fait du plombage :

$$\Delta P = \frac{12mr^2\sin(-\theta)}{\rho(3I)C_z}$$

$(3I)$ est le moment quadratique du tripale qui dépend de la surface du boom. Il sera le même que le boom soit plombé ou non. On va utiliser la relation entre le moment quadratique $3I$ du tripale et le moment d'inertie K du tripale non plombé : $K = \rho_0 e(3I)$.

$$\Delta P = \frac{mr^2}{K}\,\frac{12\sin(-\theta)}{C_z}\,\frac{\rho_0}{\rho}\,e$$

<u>Conclusion :</u>

On en tire la conclusion que pour augmenter la portée d'un tripale, il faut :

- utiliser un matériau dense ;
- mettre des plombs importants en bout de pale ;
- diminuer sa portance et augmenter son épaisseur ou plutôt augmenter le rapport $\frac{e}{C_z}$;
- **que ce tripale ait, sans plombage, une faible inertie**.

Si les 3 premier points paraissent évidents, que pensez vous du 4ème ?

<u>A.N. : Polypro : $e = 4$ mm, $\rho_0 = 920$ kg.m^{-3}</u>

$C_z = 0.5$, $K = 1800$ g.cm^{-2} $m = 3$ g, $r = 12$ cm	
$-\theta$ (°)	ΔP (m)
50	13,5
60	15,3
70	16,6
80	17,4
90	17,7

$C_z = 0.5$, $K = 2500$ g.cm^{-2} $m = 3$ g, $r = 12$ cm	
$-\theta$ (°)	ΔP (m)
50	9,7
60	11
70	12
80	12,5
90	12,7

$C_z = 0.3$, $K = 1800$ g.cm^{-2} $m = 3$ g, $r = 12$ cm	
$-\theta$ (°)	ΔP (m)
50	35,2
60	39,8
70	43,2
80	45,3
90	46

$C_z = 0.3$, $K = 2500$ g.cm^{-2} $m = 3$ g, $r = 12$ cm	
$-\theta$ (°)	ΔP (m)
50	25,4
60	28,7
70	31,1
80	32,6
90	33,1

$C_z = 0.5$, $K = 1800$ g.cm^{-2} $m = 3$ g, $r = 15$ cm	
$-\theta$ (°)	ΔP (m)
50	21,1
60	23,9
70	25,9
80	27,2
90	27,6

$C_z = 0.5$, $K = 2500$ g.cm^{-2} $m = 3$ g, $r = 15$ cm	
$-\theta$ (°)	ΔP (m)
50	15,2
60	17,2
70	18,7
80	19,6
90	19,9

$C_z = 0.5$, $K = 1800$ g.cm^{-2} $m = 1$ g, $r = 12$ cm	
$-\theta$ (°)	ΔP (m)
50	4,5
60	5,1
70	5,5
80	5,8
90	5,9

$C_z = 0.5$, $K = 2500$ g.cm^{-2} $m = 1$ g, $r = 12$ cm	
$-\theta$ (°)	ΔP (m)
50	3,2
60	3,7
70	4,0
80	4,2
90	4,2