

Analyse des efforts sur un tripale

24 mai 2007

Pour fixer les idées, considérons un tripale de vitesse à Manuel Schütz en polypro de 4 mm.

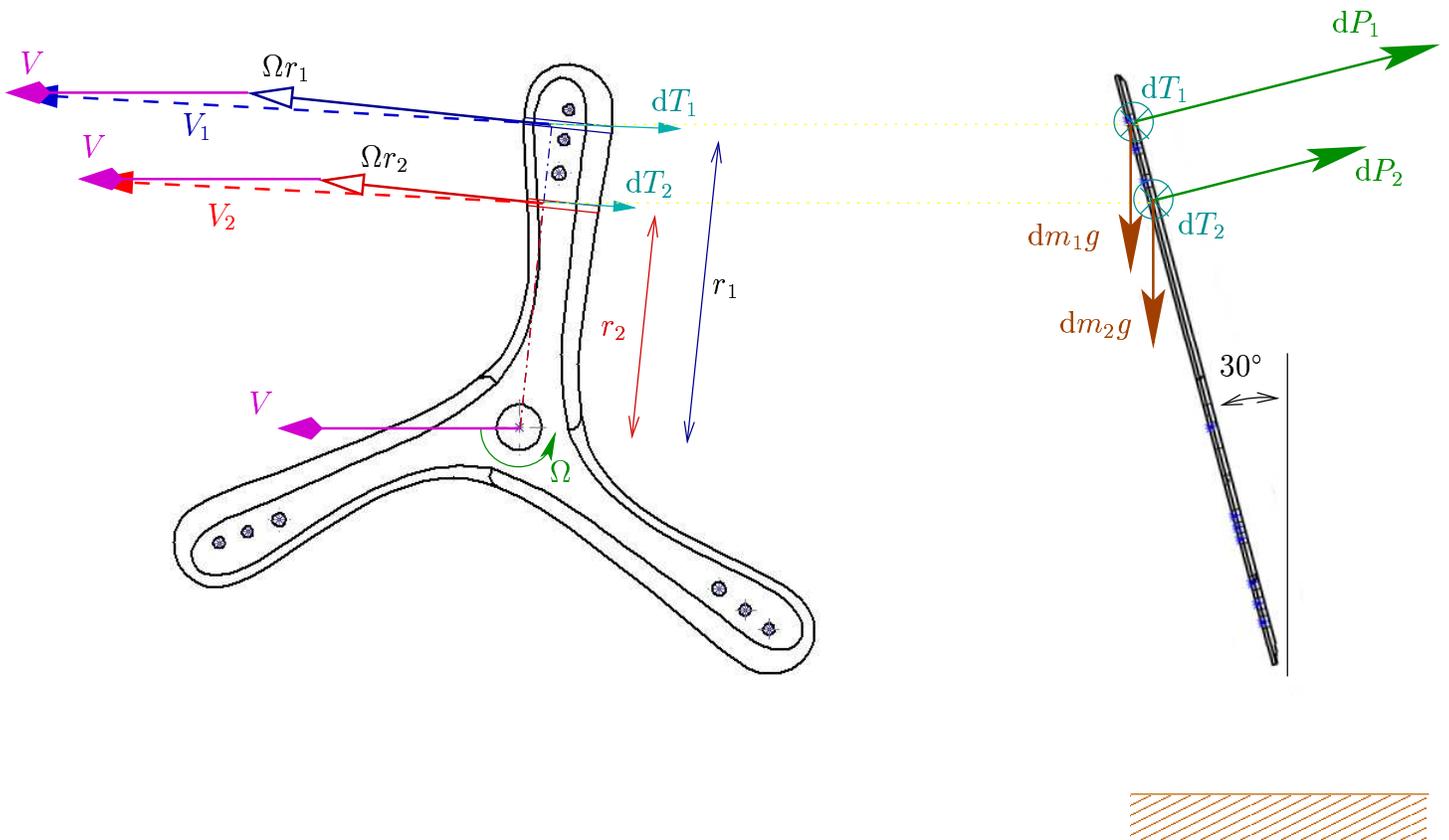


FIG. 1 – Les vitesses sont représentées à l'échelle, par contre les forces ne le sont pas!

L'air est immobile par rapport au sol.

Considérons une vitesse de rotation de $\Omega = 25$ tr/s et une vitesse linéaire $V = 60$ km/h = 16.67 m/s. Lors d'un vol circulaire d'une portée de 20 m (diamètre du cercle $D = 20$ m), le tripale parcourt $\pi D = 62.8$ m en 2.5 à 4 s (suivant le lanceur) soit une vitesse linéaire de 25 à 15 m/s soit 90 à 56 km/h.

Etudions les efforts qui s'exercent sur 2 profils donnés pour une position précise du boomerang (celle de la figure).

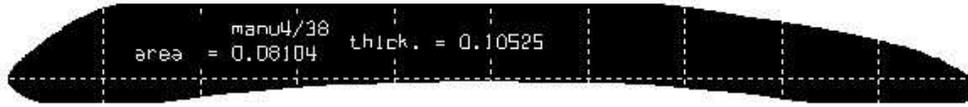
1 Forces sur le 1^{er} profil

Le 1^{er} profil, "manu4_38" (4 mm d'épaisseur pour 38 mm de largeur), est situé à $r_1 = 130$ mm de l'axe de rotation propre. La vitesse de rotation Ω engendre une vitesse linéaire $\Omega r_1 = 20.42$ m/s.

La vitesse de translation se cumule quasiment à cette vitesse précédente¹. On peut donc supposer que le profil avance dans un air immobile à la vitesse $V_1 = V + \Omega r_1 = 37.09$ m/s.

Ce profil possède une largeur $c_1 = 38$ mm.

Le nombre de Reynolds relatif à l'écoulement est $\mathcal{R}_1 = \frac{V_1 c_1}{\nu} = 93954$ où la viscosité cinématique de l'air est $\nu = 0.15 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-12}$.



Des calculs³ aérodynamiques sur ce profil⁴ permettent de déterminer les coefficients aérodynamiques à différents nombres de Reynolds et d'obtenir (par interpolation linéaire) la valeur de ces coefficients aérodynamiques au nombre de Reynolds qui nous intéresse

| | | | | |
|---------------|---------|---------|---------|-------|
| \mathcal{R} | 90000 | 93954 | 100000 | cf §8 |
| C_z | 0.4332 | 0.4229 | 0.4072 | |
| C_x | 0.02790 | 0.02752 | 0.02694 | |

Nous pouvons alors déterminer les forces aérodynamiques qu'exerce l'air (de masse volumique $\rho = 1.24 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) sur $de = 1$ mm de longueur de pale :

$$\text{la force de trainée : } dT_1 = \frac{1}{2} \rho de c_1 C_x V_1^2 = 0.89 \text{ mN (milliNewton)}$$

$$\text{la force de portance : } dP_1 = \frac{1}{2} \rho de c_1 C_z V_1^2 = 13.70 \text{ mN}$$

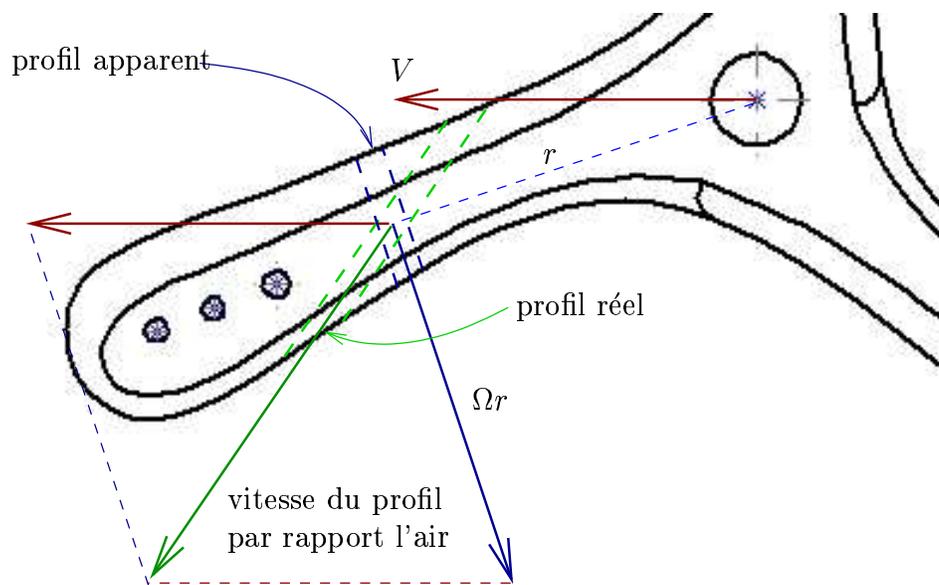
On pourrait effectuer ces calculs pour différents profils du tripale bien que l'on va se confronter au problème entre profil apparent et profil réelle (dans le précédent calcul, pour obtenir V_1 , on a additionné bêtement les vitesses V et Ωr_1 alors que pour la plupart des profils ces 2 vitesses n'ont pas la même direction).

¹en réalité pas exactement pour la position du tripale de la FIG. 1 : V , Ωr_1 et Ωr_2 ont 3 directions légèrement différentes

²Ceci est une valeur standard. Il faut cependant savoir que la viscosité de l'air dépend de sa température et de sa pression.

³réalisés avec le logiciel gratuit Xfoil <http://raphael.mit.edu/xfoil/index.html>

⁴http://perso.univ-rennes1.fr/laurent.blanchard/Profils/manu4_38/index.html



2 Forces sur le 2nd profil

Reprenons ces calculs pour un 2nd profil, "manu4_30" (4 mm d'épaisseur pour 30 mm de largeur), situé à $r_2 = 95$ mm de l'axe de rotation propre.

La vitesse de rotation Ω engendre une vitesse linéaire $\Omega r_2 = 20.42$ m/s.

La vitesse de translation se cumule quasiment à cette vitesse précédente. On peut donc supposer que le profil avance dans un air immobile à la vitesse $V_2 = V + \Omega r_2 = 31.59$ m/s.

Ce profil possède une largeur $c_2 = 30$ mm.

Le nombre de Reynolds relatif à l'écoulement est $\mathcal{R}_2 = \frac{V_2 c_2}{\nu} = 63178$.



Des calculs aérodynamiques sur ce profil⁵ permettent de déterminer les coefficients aérodynamiques à différents nombres de Reynolds et d'obtenir (par interpolation linéaire) la valeur de ces coefficients aérodynamiques au nombre de Reynolds qui nous intéresse

| \mathcal{R} | 60000 | 63178 | 70000 | |
|---------------|---------|---------|---------|-------|
| C_z | 0.4939 | 0.49314 | 0.4915 | cf §8 |
| C_x | 0.04220 | 0.04138 | 0.03962 | |

Nous pouvons alors déterminer les forces qui s'exercent sur $de = 1$ mm de longueur de pale :

$$\text{la force de traînée : } dT_2 = \frac{1}{2} \rho de c_2 C_x V_2^2 = 0.77 \text{ mN} \approx \frac{1}{1.15} dT_1$$

$$\text{la force de portance : } dP_2 = \frac{1}{2} \rho de c_2 C_z V_2^2 = 9.15 \text{ mN} \approx \frac{1}{1.49} dP_1$$

Les forces sur ce 2nd profil ne sont pas négligeables par rapport à celles sur le 1^{er} profil.

⁵http://perso.univ-rennes1.fr/laurent.blanchard/Profils/manu4_30/index.html

C'est la somme de toutes ces forces (qui possèdent des directions bien précises et différentes pour chaque profil) qu'il faudrait faire (cf §6) pour obtenir un modèle (ce ne sera pas la réalité) de force globale appliquée au tripale ...pour éventuellement (et au moins⁶) la comparer au poids de tout le tripale.

3 Comparaison poids et portance d'un profil

La modélisation du profil par Xfoil nous donne la surface adimensionnée (*area*) du profil en coupe. La surface du profil en coupe est par définition $S = area \cdot c^2$. Si l'on connaît la masse volumique $\rho' = 920 \text{ kg.m}^{-3}$ du matériau du tripale, on en déduit la masse dm puis le poids gdm qui s'exercent sur $de = 1 \text{ mm}$ de longueur de pale à partir de l'accélération de la pesanteur $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$:

$$dmg = \rho' S g de$$

| profil | ép./c=thick | area | $S \text{ (mm}^2\text{)}$ | $dmg \text{ (mN)}$ | $\sin \alpha dP \text{ (mN)}$ |
|-----------------|-------------|---------|---------------------------|--------------------|-------------------------------|
| 1 ^{er} | 4/38 | 0.08097 | 117 | 1.0552 | 6.85 |
| 2 nd | 4/30 | 0.10257 | 92 | 0.8331 | 4.57 |

Sur la FIG. 1, le poids et la portance d'un profil n'ont pas la même direction. Si l'on veut comparer ces 2 forces, il faut comparer gdm à $\sin \alpha dP$. En prenant par exemple une inclinaison par rapport à la verticale de $\alpha = 30^\circ$ on obtient la dernière colonne du tableau précédent.

On remarque que la composante de portance qui a tendance (sur ces 2 profils) à faire monter le tripale est bien supérieure au poids qui lui a tendance à le faire descendre. Si tous les profils étaient identiques⁷, le boomerang aurait tendance à monter. Pour un vol à altitude constante, il faut⁸ que l'ensemble (sur les 3 pales) des poids⁹ des profils compensent l'ensemble des composantes de portance $\sin \alpha dP$.

4 Effort sur ces profils après une demi révolution

Par curiosité, on peut calculer les efforts sur ces mêmes profils après une demi révolution du tripale, les vitesses de rotation et de translation se soustrayant alors.

Le 1^{er} profil situé à $r_1 = 130 \text{ mm}$ de l'axe de rotation propre avance dans un air immobile à la vitesse $V'_1 = -V + \Omega r_1 = 3.75 \text{ m/s}$.

Le nombre de Reynolds relatif à l'écoulement est $\mathcal{R}'_1 = \frac{V'_1 c_1}{\nu} = 9509$.

De la même manière que précédemment, on obtient les coefficients aérodynamiques au nombre de Reynolds qui nous intéresse :

| | | | |
|---------------|--------|--------|--------|
| \mathcal{R} | 8000 | 9509 | 12000 |
| C_z | 0.1065 | 0.0887 | 0.0594 |
| C_x | 0.0527 | 0.0498 | 0.0449 |

On remarque ici une grande variation de C_z entre $\mathcal{R} = 8000$ et 12000 . La valeur estimée à $\mathcal{R} = 9509$, à savoir 0.0887 , est donc approchée et très certainement fautive. Il faudrait refaire des calculs avec Xfoil. Nous pouvons alors déterminer les forces qui s'exercent sur $de = 1 \text{ mm}$ de longueur de pale :

$$\text{la force de trainée : } dT'_1 = \frac{1}{2} \rho de c_1 C_x V_1^2 = 0.016 \text{ mN} \approx \frac{1}{55} dT_1$$

$$\text{la force de portance : } dP'_1 = \frac{1}{2} \rho de c_1 C_z V_1^2 = 0.029 \text{ mN} \approx \frac{1}{472} dP_1$$

⁶ car l'effet gyroscopique qui fait revenir le boomerang n'est pas développé dans ces calculs !

⁷ ce n'est pas le cas.

⁸ On n'oublie pas que l'angle α évolue au cours du vol !

⁹ qui se trouve être le poids du boomerang.

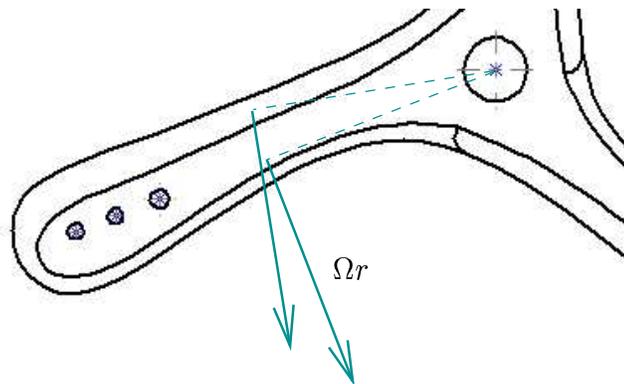
On se rend compte que de ce côté, le profil ne porte quasiment plus alors qu'il pèse tout autant ! Les forces de trainée sont plus faibles mais ne diminuent pas autant que celles de portance !

Si l'on refait ces calculs pour le 2nd profil situé à $r_2 = 95$ mm, on s'aperçoit que $\Omega r_2 < V$ se qu'il fait que c'est le bord de fuite qui attaque l'air immobile ! ... pour ces valeurs imposées de façon arbitraire de Ω et V .

5 Remarques

Si l'on souhaite utiliser ce type de relation pour déterminer l'action globale de l'air sur le tripale, il faut penser que :

- les caractéristiques aérodynamiques sont prises pour un angle d'attaque de l'air par rapport au profil de 0° ce qui est vrai si l'on ne pense pas aux perturbations que provoque la pale précédente lors de son passage et uniquement si l'air ne bouge pas par rapport au sol ;
- ces équations proviennent d'une théorie d'un écoulement plan or l'écoulement réel autour du tripale est en 3D surtout près du centre du tripale et en bout de pale ... donc quasiment partout mais également pour la plupart des positions d'une pale sauf peut être lorsqu'elle est en position haute. Certains avions possèdent des winglets permettant de minimiser les effets négatifs d'écoulement 3D en bout de pales ;
- la modélisation en écoulement 2D est d'autant plus vraie que l'on se situe loin de l'axe de rotation propre (sans pour autant être à l'extrémité des pales) ... comment influe le centre de notre tripale sur les efforts qu'il subit !?!?
- la direction de la vitesse Ωr n'est pas la même pour tous les points d'un même profil apparent au sens où il a été dessiné : cette différence est d'autant plus grande que r est faible donc que l'on se trouve proche du centre ;



et si l'on pense au profil réel, tous les points de ce profil ne sont pas à la même distance de l'axe de rotation propre ! ... donc l'écoulement est réellement 3D et il est utopique de vouloir effectuer des calculs 2D sur un boomerang.

- les précédentes valeurs numériques sont issues d'une vitesse de rotation Ω et d'une vitesse de translation V qu'il serait souhaitable de mesurer expérimentalement (**appel au photographe**) car toute théorie doit être confrontée à l'expérience pour être validée !
- on a parlé de force appliquée à un profil ; Cette force est appliquée en un point (du profil) qui peut être calculé mais qui pourra évoluer sur le profil en fonction de Ω et V et du profil¹⁰.

¹⁰<http://perso.univ-rennes1.fr/laurent.blanchard/Profils/centrepoussee/index.html>

6 Evolution des efforts sur 1 pale

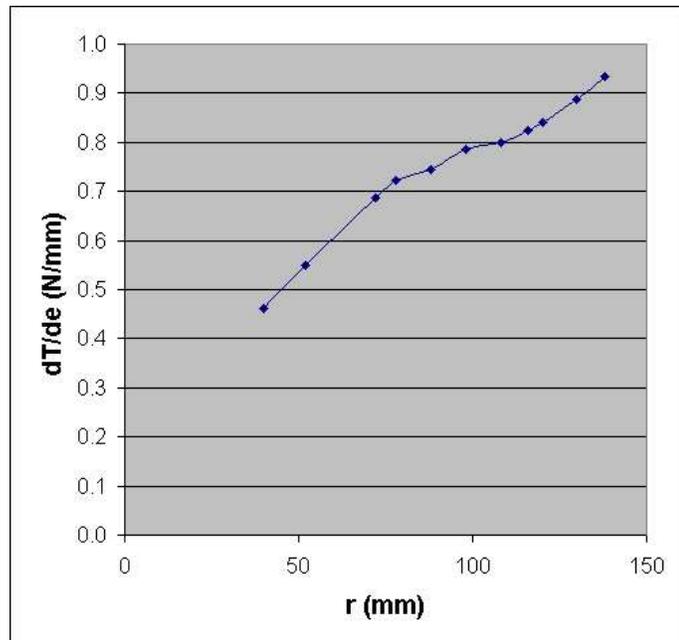
Analysons, de la même manière que précédemment, les variations des efforts sur une pale lorsqu'elle est en position verticale haute pour les mêmes vitesses de rotation Ω et linéaire V que précédemment

| $V = 60 \text{ km/h} \quad \Omega = 25 \text{ tr/s}$ | | | | | | | |
|--|------|----------------|---------------|---------|--------|----------------------------|----------------------------|
| r | c | $V + \Omega r$ | \mathcal{R} | C_x | C_z | $\frac{dT}{de}$ | $\frac{dP}{de}$ |
| (mm) | (mm) | (m/s) | | | | (10^{-3} N/mm) | (10^{-3} N/mm) |
| 40 | 28 | 22.95 | 42840 | 0.05042 | 0.5059 | 0.4611 | 4.6256 |
| 52 | 25 | 24.83 | 41391 | 0.05738 | 0.5281 | 0.5485 | 5.0490 |
| 72 | 25 | 27.98 | 46627 | 0.07565 | 0.6090 | 0.6881 | 6.5151 |
| 78 | 26 | 28.92 | 50126 | 0.05353 | 0.5372 | 0.7216 | 7.2424 |
| 88 | 28 | 30.49 | 56914 | 0.04619 | 0.5156 | 0.7454 | 8.3218 |
| 98 | 30 | 32.06 | 64121 | 0.04109 | 0.4966 | 0.7856 | 9.4943 |
| 108 | 33 | 33.63 | 73989 | 0.03450 | 0.4719 | 0.7983 | 10.9204 |
| 116 | 35 | 34.89 | 81405 | 0.03124 | 0.4552 | 0.8250 | 12.0217 |
| 120 | 36 | 35.52 | 85239 | 0.02986 | 0.4492 | 0.8408 | 12.6482 |
| 130 | 38 | 37.09 | 93954 | 0.02907 | 0.4416 | 0.8860 | 13.7786 |
| 138 | 38 | 38.34 | 97137 | 0.02700 | 0.4201 | 0.9354 | 14.5550 |

On peut tracer l'évolution de la force (répartie - exprimée en Newton par millimètre de longueur de pale) de trainée le long de la pale (en fonction de r). La force de trainée globale sur cette pale sera calculée par :

$$\begin{aligned}
 T &= \int dT = \int_{r \approx 40 \text{ mm}}^{r \approx 140 \text{ mm}} \frac{dT}{de} dr \\
 &\approx 0.7 \cdot 10^{-3} \text{ N/mm} * 100 \text{ mm} \\
 &= 0.07 \text{ N}
 \end{aligned}$$

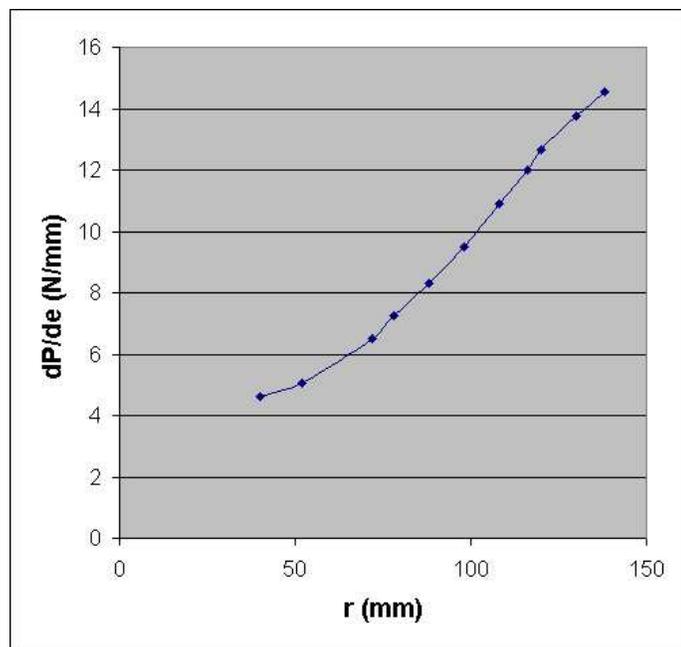
Cette intégrale est représentée par l'aire sous la courbe.



De même, on trace l'évolution de la force (répartie - exprimée en Newton par millimètre de longueur de pale) de portance le long de la pale. La force de portance globale sur cette pale sera calculée par :

$$\begin{aligned}
 P &= \int dP = \int_{r \approx 40 \text{ mm}}^{r \approx 140 \text{ mm}} \frac{dP}{de} dr \\
 &\approx 9 \cdot 10^{-3} \text{ N/mm} * 100 \text{ mm} \\
 &= 0.9 \text{ N}
 \end{aligned}$$

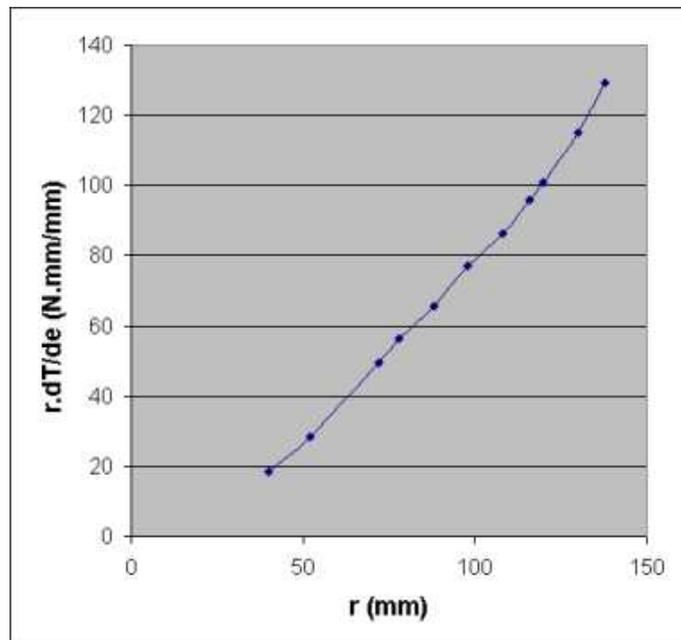
Cette intégrale est représentée par l'aire sous la courbe.



De même, on trace l'évolution du couple (réparti - exprimé en Newton.millimètre par millimètre de longueur de pale) de freinage engendré par la trainée le long de la pale. Le couple de freinage global sur cette pale sera calculée par :

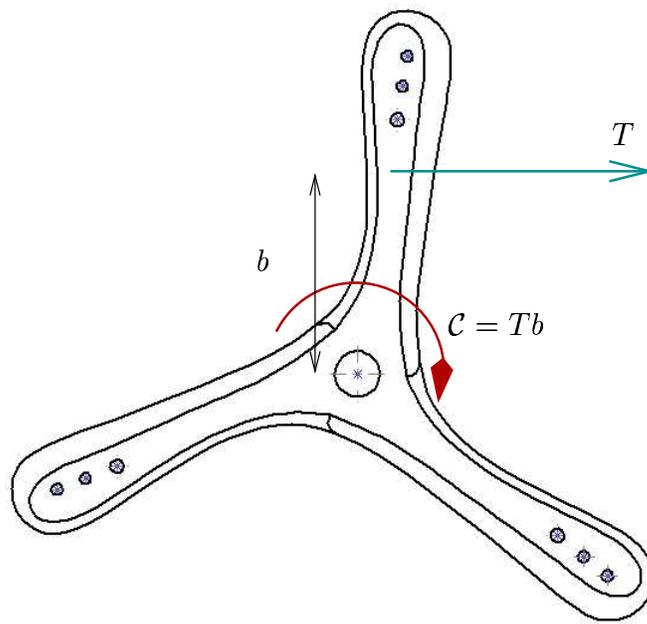
$$\begin{aligned}
 \mathcal{C} &= \int d\mathcal{C} = \int r dT \\
 &= \int_{r \approx 40 \text{ mm}}^{r \approx 140 \text{ mm}} \frac{r dT}{de} dr \\
 &\approx 70 \cdot 10^{-3} \text{ N.mm/mm} * 100 \text{ mm} \\
 &= 7 \text{ N.mm}
 \end{aligned}$$

Cette intégrale est représentée par l'aire sous la courbe.



Ce couple $\mathcal{C} = 7 \text{ N.mm}$ provient de la trainée $T = 0.07 \text{ N}$, on peut en déduire une distance b telle que $\mathcal{C} = Tb$ qui vaut $b = 100 \text{ mm}$. C'est comme si la force globale de trainée s'appliquait à $b = 100 \text{ mm}$ de l'axe de rotation propre.

Attention, on ne parle pas ici d'effet gyroscopique qui provient de la force globale de portance et de son point d'application ...



7 Exploitation

Que peut'on faire avec ces valeurs?

7.1 Compensation du poids

Supposons que pour cette position du tripale, c'est sur cette pale que s'exerce la majeure partie de l'action de l'air (ce qui est loin d'être vrai ...).

Nous avons alors la composante de portance $P \sin \alpha = P \sin(30^\circ) = \frac{1}{2}P = 0.45 \text{ N}$ qui doit compenser le poids 0.49 N du tripale¹¹. On a $0.49 \text{ N} > 0.45 \text{ N}$, ce qui signifie que le tripale va avoir une accélération descendante (négative) ; le tripale va donc chuter dans sa course. Ceci peut provenir de :

- la vitesse de rotation Ω ou (et) la vitesse de translation V ont été sousestimées ;
- l'angle α est supérieur à 30° : un angle de 33° conviendrait car $P \sin(33^\circ) = 0.49 \text{ N}$;
- les autres pales ou le centre du tripale ont tendance à avoir une portance ...

7.2 Deccélérations linéaire et angulaire

L'utilisation du **P.F.D.**¹² sous forme simplifiée va permettre d'approximer les accélérations. Les équations suivantes sont exactes si le tripale allait en ligne droite avec une inclinaison (α) par rapport à la verticale constante. La force de traînée T et le couple de freinage C évoluent lors du vol : supposons les constants pour évaluer ce qui suit.

7.2.1 linéaire

La vitesse de translation V va diminuer au cours du vol du fait de la force de traînée T et de la masse m du tripale. La variation dans le temps de V est donnée par la deccélération linéaire Γ dans :

$$-T = m\Gamma \quad \Longrightarrow \quad \Gamma = -\frac{T}{m} = -1.43 \text{ m.s}^{-2}$$

¹¹La modélisation 3D en CAO du tripale donne : masse $m = 49 \text{ g}$, inertie $I = 4500 \text{ g.cm}^2$

¹²Principe fondamental de la dynamique qui permet de relier les efforts aux accélérations.

Donc si le tripale est lancé à $V_i = 16.67 \text{ m.s}^{-1}$ comme annoncé initialement, il va perdre 1.43 m.s^{-1} à chaque seconde de vol. Après un vol de $\Delta t = 3 \text{ s}$, sa vitesse sera de :

$$V_f = V_i + \Gamma \Delta t = 12.38 \text{ m.s}^{-1} = 44.57 \text{ km.h}^{-1}$$

7.2.2 angulaire

La vitesse de rotation Ω va diminuer au cours du vol du fait du couple \mathcal{C} et de l'inertie I du tripale. La variation dans le temps de Ω est donnée par $\dot{\Omega}$ dans :

$$\mathcal{C} = -I\dot{\Omega} \implies \dot{\Omega} = -\frac{\mathcal{C}}{I} \approx -15.5 \text{ rd.s}^{-2} = -2.47 \text{ tr.s}^{-2}$$

Donc si le tripale est lancé à $\Omega_i = 25 \text{ tr.s}^{-1}$ comme annoncé initialement, il va perdre 2.47 tr.s^{-1} à chaque seconde de vol. Après un vol de $\Delta t = 3 \text{ s}$, sa vitesse sera de :

$$\Omega_f = \Omega_i + \dot{\Omega} \Delta t = 110.41 \text{ rd.s}^{-1} = 17.57 \text{ tr.s}^{-1}$$

7.2.3 Remarques

La force de trainée T et le couple de freinage \mathcal{C} diminuant avec les vitesses de translation V et de rotation Ω , les décélérations précédentes ont été surestimées : Ω_f et V_f sont plus importants que les résultats précédents.

7.3 Energie

On peut estimer¹³ l'énergie cinétique (exprimée en Joule) du tripale avec :

$$E_c = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}I\Omega^2$$

A l'instant initial cette énergie vaut :

$$E_{ci} = \underbrace{\frac{1}{2}mV_i^2}_{6.81 \text{ J}} + \underbrace{\frac{1}{2}I\Omega_i^2}_{5.55 \text{ J}} = 12.36 \text{ J}$$

A l'instant final cette énergie vaut :

$$E_{cf} = \underbrace{\frac{1}{2}mV_f^2}_{3.75 \text{ J}} + \underbrace{\frac{1}{2}I\Omega_f^2}_{2.74 \text{ J}} = 6.50 \text{ J}$$

Soit une perte d'énergie de 5.86 J soit 47% de l'énergie initiale (45% de perte en translation et 50% en rotation). Cette énergie a été perdue par la force de trainée et par le couple de freinage et peut être calculée par les puissances perdues par ces actions.

La puissance perdue par la force de trainée est $\mathcal{P}_1 = -TV$ or V dépend du temps (T aussi mais on l'a considéré constant). L'énergie perdue est calculée par :

$$E_1 = \int_{t_i=0}^{t_f=\Delta t} \mathcal{P}_1 dt = \dots \approx -\frac{1}{2}T(V_f + V_i)\Delta t = -3.06 \text{ J}$$

¹³On ne prend en compte ici qu'une translation rectiligne et la seule vitesse de rotation propre du tripale!

La puissance perdue par le couple de freinage est $\mathcal{P}_2 = -C\Omega$ or Ω dépend du temps (C aussi mais on l'a considéré constant). L'énergie perdue est calculée par :

$$E_{c2} = \int_{t_i=0}^{t_f=\Delta t} \mathcal{P}_2 dt = \dots \approx -\frac{1}{2}C(\Omega_f + \Omega_i)\Delta t = -2.81 \text{ J}$$

L'énergie cinétique initiale (précédemment calculée) a été fournie par le lanceur en développant une certaine puissance \mathcal{P}_L durant le laps de temps du lancer Δt_L . En considérant que \mathcal{P}_L est constante durant tout le laps de temps du lancer on a :

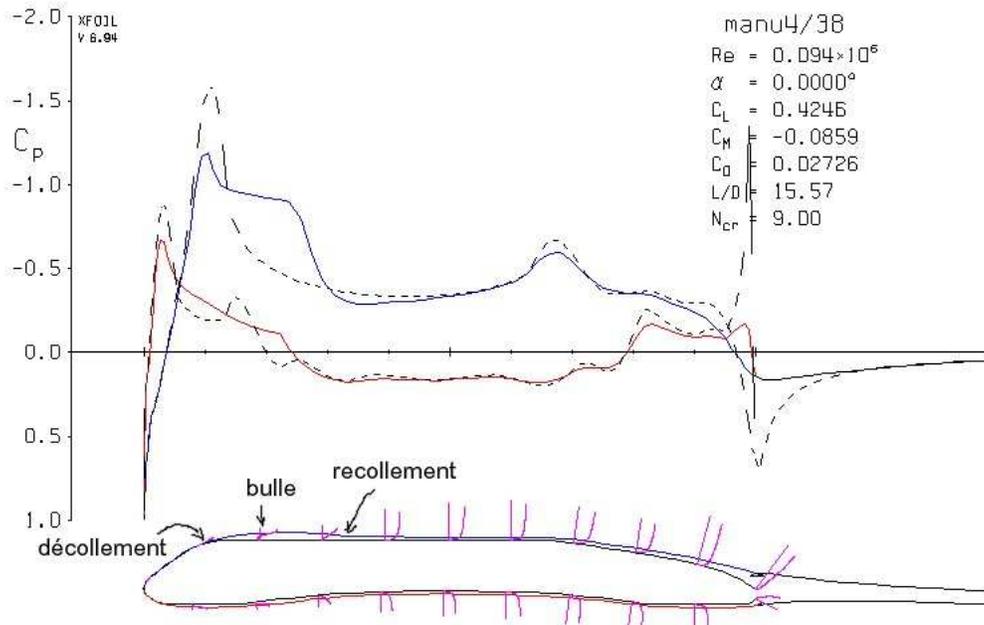
$$E_{ci} = \mathcal{P}_L \Delta t_L$$

En prenant une puissance de 200 W on obtient $\Delta t_L = 0.0618$ s. En prenant $\Delta t_L = 0.05$ s = $\frac{1}{20}$ s, on obtient 247 W. Ces valeurs paraissent raisonnables mais sont peut être loin de la vérité ...

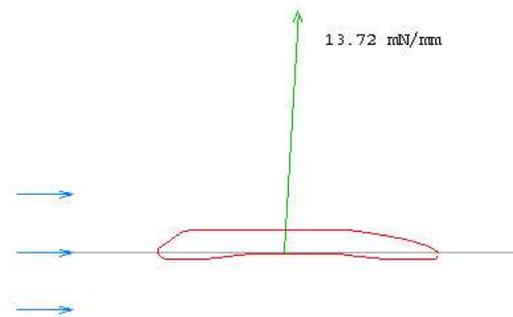
Ceci signifie qu'un lanceur développerait 247 W durant les $\frac{1}{20}$ ème de seconde d'un lancer pour amener ce tripale à une vitesse linéaire de $V = 60$ km/h et une vitesse de rotation de $\Omega = 25$ tr/s.

8 Centre de poussée

Un calcul avec Xfoil sur le 1^{er} profil ("manu4_38") à $\mathcal{R} = 93954$ donne :



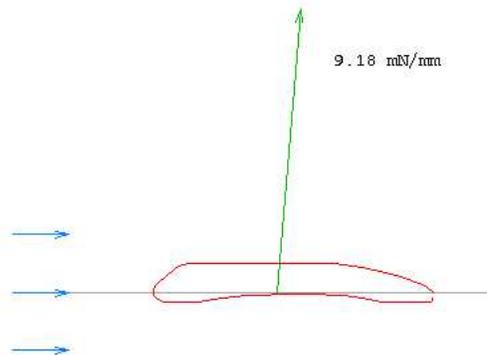
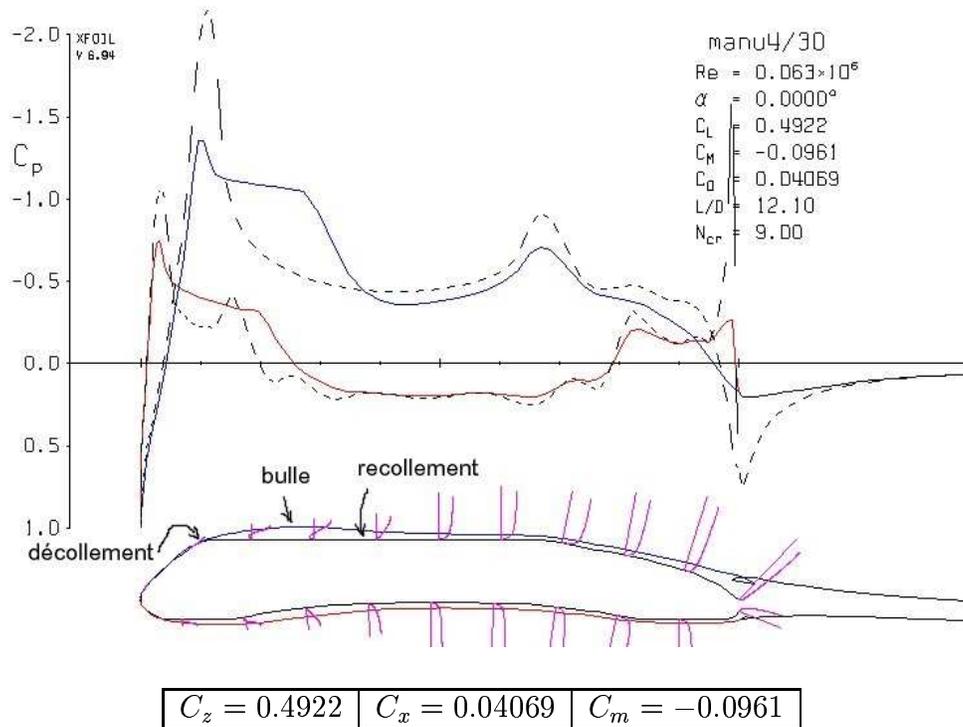
| | | |
|----------------|-----------------|-----------------|
| $C_z = 0.4246$ | $C_x = 0.02726$ | $C_m = -0.0859$ |
|----------------|-----------------|-----------------|



L'approximation réalisée par interpolation linéaire était réaliste vu que l'on commet une erreur inférieure à 1%.

On peut déduire de ces résultats la position du point d'application de cette force : on trouve $0.452c_1$.

Un calcul avec Xfoil sur le 2nd profil ("manu4_30") à $\mathcal{R} = 63178$ donne :



L'approximation réalisée par interpolation linéaire était réaliste vu que l'on commet une erreur inférieure à 1.7%.

On peut déduire de ces résultats la position du point d'application de cette force : on trouve $0.445c_1$.

Sur les dessins précédents, les forces sont positionnées et inclinées correctement mais il ne faut pas comparer la grandeur de la force des 2 dessins : les intensités de force ne sont pas à la même échelle sur les 2 dessins.

Voilà ce que l'on peut s'amuser à faire théoriquement.

Mais toute théorie n'est validée que si elle est vérifiée expérimentalement ...