

# Modélisation de l'effort sur un Tripale & un Quadripale

2 mars 2005

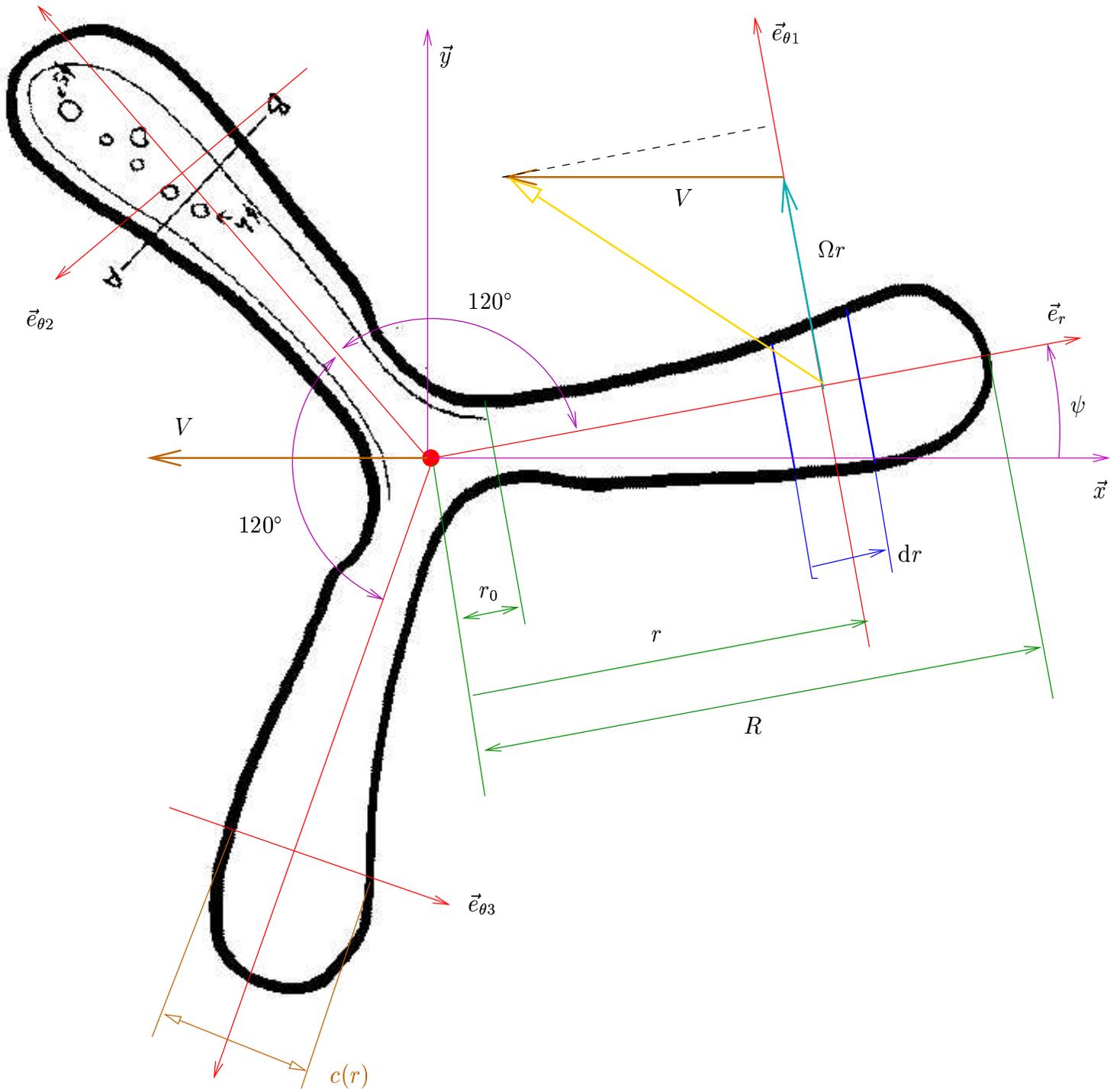
# Chapitre 1

## Tripale

### 1.1 Hypothèses toutes critiquables

- Tripale de pales identiques à  $120^\circ$  ;
- Pas de dièdre ;
- Les pales sont découpées en une succession de profils théoriques et non "réels" : sur chacun d'eux on applique une théorie d'écoulement plan  $(P, \vec{e}_\theta, \vec{z})$  : ce qui est d'autant plus faux que le rayon est faible et ce qui est faux à l'extrémité de la pale ;
- La vitesse de l'air par rapport au boomerang,  $-V_\infty \vec{e}_\theta + \dots \vec{e}_r$ , provient :
  - de la vitesse de rotation du boomerang :  $\Omega \vec{z}$  ;
  - de la vitesse de translation du boomerang :  $-V \vec{x}$  ;on considère alors que la composante de vitesse suivant  $\vec{e}_r$  ne provoque aucun effort !
- Coefficients aérodynamiques de trainée (suivant  $\vec{e}_{\theta_i}$ )  $C_x$  et de portance (suivant  $\vec{z}$ )  $C_z$  d'un profil courant d'une pale considérés comme constants ;
- On note  $O$  le centre de gravité du tripale ;
- La position du centre de poussée (point  $P$ ) sur un profil réel est approximée et est telle que  $\vec{OP} = r \vec{e}_r$  ; ce qui est faux. Du fait de cette hypothèse nous ne pourrions pas en déduire un effet tombant ou montant du boomerang !

## 1.2 Modélisation de l'action air-boomerang



La force élémentaire exercée sur une surface élémentaire d'aire  $dS = c(r)dr$  de la pale  $i$ , de largeur  $c(r)$ , est modélisée par :

$$d\vec{F}_i = -dT_i \vec{e}_{\theta_i} + dP_i \vec{z} \quad \text{avec} \quad i \in [1; 3] \quad \text{où} \quad \begin{cases} dT_i = \frac{1}{2} \rho dS C_x V_{\infty i}^2 = dk V_{\infty i}^2 \\ dP_i = \frac{1}{2} \rho dS C_z V_{\infty i}^2 = dk f V_{\infty i}^2 \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} dk = \frac{1}{2} \rho C_x dS \\ f = \frac{C_z}{C_x} \end{cases}$$

Avec une vitesse  $V_{\infty i}$  différente pour chaque pale  $i$  :

$$V_{\infty i} = (\Omega r \vec{e}_{\theta i} - V \vec{x}) \cdot \vec{e}_{\theta i} = \Omega r - V \vec{x} \cdot \vec{e}_{\theta i}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{e}_{\theta 1} = \cos(\psi + 90^\circ) = -\sin \psi$$

$$\vec{x} \cdot \vec{e}_{\theta 2} = \cos(\psi + 90^\circ + 120^\circ) = \cos \psi \cos(210^\circ) - \sin \psi \sin(210^\circ) = \frac{1}{2}(-\cos \psi \sqrt{3} + \sin \psi)$$

$$\vec{x} \cdot \vec{e}_{\theta 3} = \cos(\psi + 90^\circ + 240^\circ) = \cos \psi \cos(330^\circ) - \sin \psi \sin(330^\circ) = \frac{1}{2}(\cos \psi \sqrt{3} + \sin \psi)$$

soit

$$V_{\infty 1} = \Omega r + V \sin \psi$$

$$V_{\infty 2} = \Omega r - \frac{V}{2}(-\cos \psi \sqrt{3} + \sin \psi)$$

$$V_{\infty 3} = \Omega r - \frac{V}{2}(\cos \psi \sqrt{3} + \sin \psi)$$

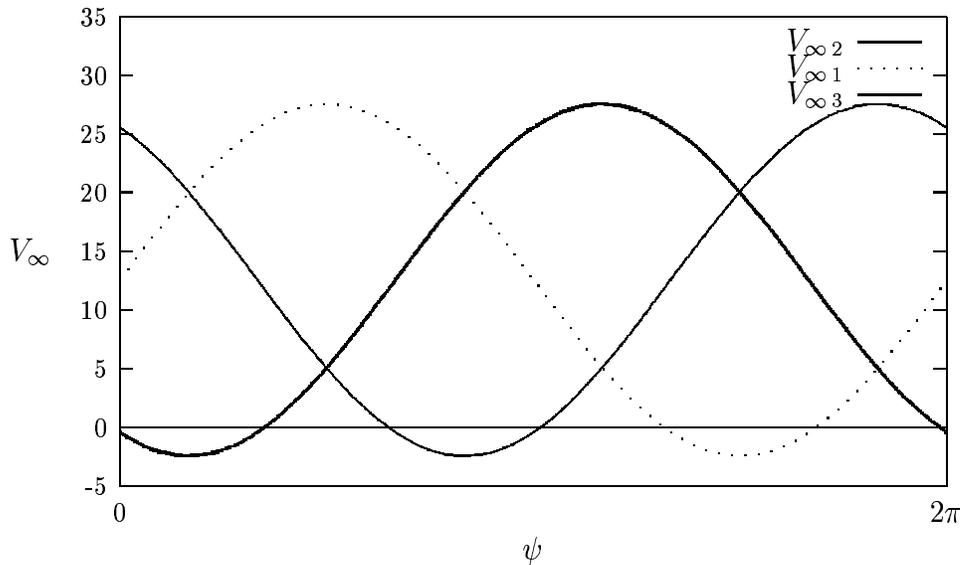


FIG. 1.1 – Evolution de la vitesse de l'air par rapport à la pale sur un tour de celle-ci et cela pour chacune des 3 pales mais aussi pour  $r = 10$  cm,  $\Omega = 20$  tr.s<sup>-1</sup> et  $V = 15$  m.s<sup>-1</sup>

On remarque alors que  $V_{\infty i}$  peut être négatif : cela signifie que ce n'est plus le bord d'attaque qui attaque l'air mais le bord de fuite! Le modèle précédent est alors incorrect car il ne gère pas ce phénomène. En effet pour les profils où  $V_{\infty i} < 0$ , il faudrait écrire :

$$d\vec{F}_i = +dT_i \vec{e}_{\theta i} + dP_i \vec{z}$$

avec  $dT_i = \frac{1}{2} \rho dS C'_x V_{\infty i}^2$  et  $dP_i = \frac{1}{2} \rho dS C'_z V_{\infty i}^2$

où  $C'_x$  et  $C'_z$  serait les coefficients aérodynamiques du profil pris en sens inverse.

Lors de la rotation de la pale  $i$ , il y aura une valeur de  $r$  à partir de laquelle  $V_{\infty i}$  sera négatif sur une certaine plage de  $\psi$  comprise entre  $]\pi; 2\pi[$  bien que cela dépende des valeurs de  $\Omega$  et  $V$ .

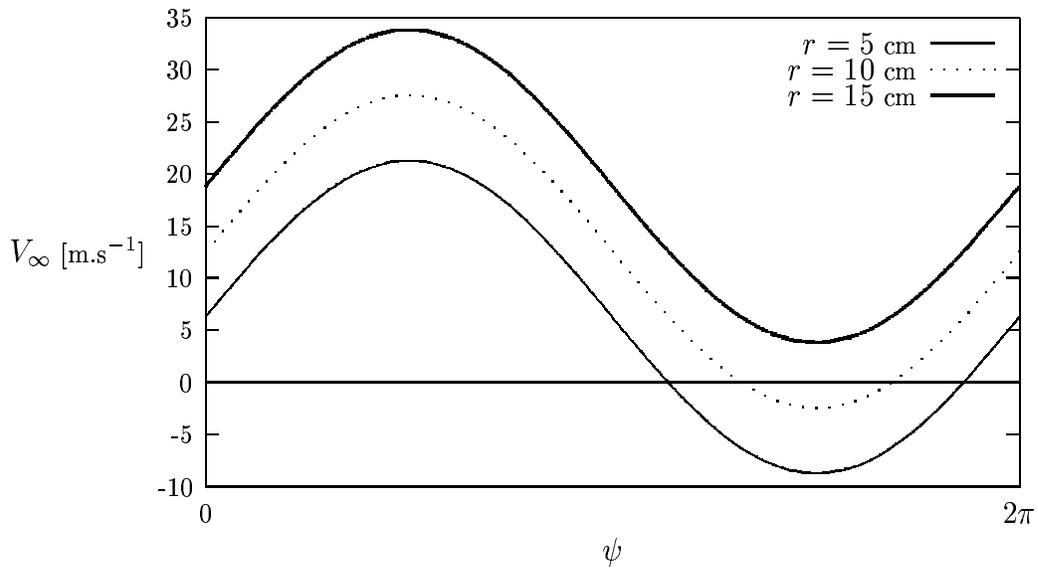


FIG. 1.2 – Evolution de la vitesse de l'air par rapport à une pale sur un tour de celle-ci pour différents rayons mais pour  $\Omega = 20 \text{ tr.s}^{-1}$  et  $V = 15 \text{ m.s}^{-1}$  : c'est à partir de  $r \approx 8 \text{ cm}$  que  $V_{\infty i} < 0$  pour une certaine plage de  $\psi$ .

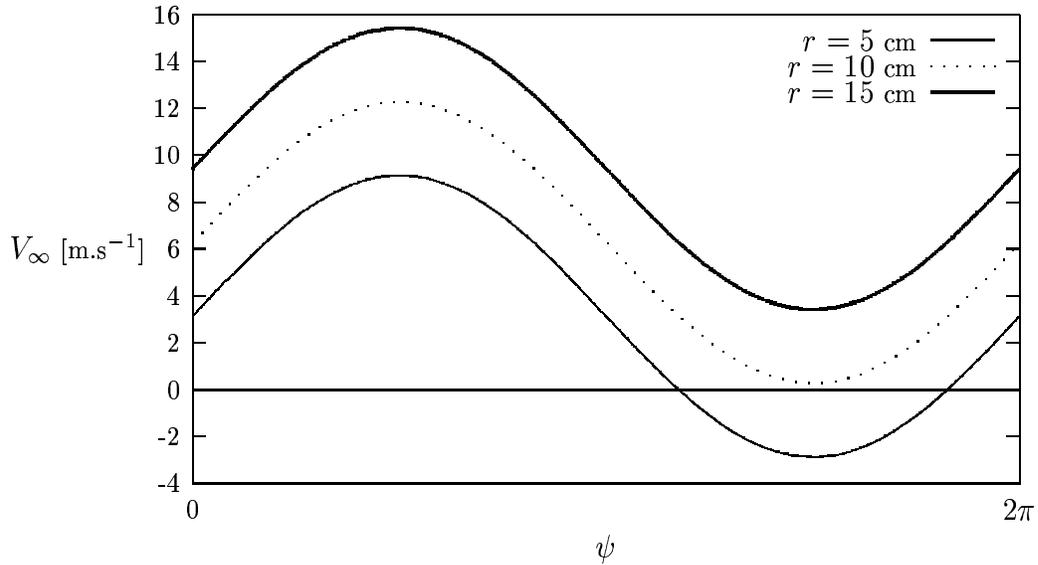


FIG. 1.3 – Evolution de la vitesse de l'air par rapport à une pale sur un tour de celle-ci pour différents rayons mais pour  $\Omega = 10 \text{ tr.s}^{-1}$  et  $V = 6 \text{ m.s}^{-1}$  : c'est à partir de  $r \approx 10.5 \text{ cm}$  que  $V_{\infty i} < 0$  pour une certaine plage de  $\psi$ .

### 1.3 Force

Il faut alors faire la somme des forces élémentaires sur tout le boomerang. Pour effectuer cette somme regroupons les forces élémentaires exercées sur chacune des 3 pales :

$$d\vec{F} = d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2 + d\vec{F}_3 = -dT_1\vec{e}_{\theta_1} - dT_2\vec{e}_{\theta_2} - dT_3\vec{e}_{\theta_3} + dP_1\vec{z} + dP_2\vec{z} + dP_3\vec{z}$$

projettons dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  :

$$\vec{e}_{\theta_1} = \begin{pmatrix} \cos(\psi + 90^\circ) = -\sin \psi \\ \sin(\psi + 90^\circ) = \cos \psi \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y})}$$

$$\vec{e}_{\theta_2} = \begin{pmatrix} \cos(\psi + 90^\circ + 120^\circ) = \frac{1}{2}(-\cos \psi \sqrt{3} + \sin \psi) \\ \sin(\psi + 90^\circ + 120^\circ) = \cos \psi \sin(210^\circ) + \sin \psi \cos(210^\circ) = \frac{1}{2}(-\cos \psi - \sin \psi \sqrt{3}) \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y})}$$

$$\vec{e}_{\theta_3} = \begin{pmatrix} \cos(\psi + 90^\circ + 240^\circ) = \frac{1}{2}(\cos \psi \sqrt{3} + \sin \psi) \\ \sin(\psi + 90^\circ + 240^\circ) = \cos \psi \sin(330^\circ) + \sin \psi \cos(330^\circ) = \frac{1}{2}(-\cos \psi + \sin \psi \sqrt{3}) \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y})}$$

soit pour la force élémentaire sur les 3 pales :

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= -dT_1 \begin{pmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix} - dT_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-\cos \psi \sqrt{3} + \sin \psi) \\ \frac{1}{2}(-\cos \psi - \sin \psi \sqrt{3}) \\ 0 \end{pmatrix} - dT_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\cos \psi \sqrt{3} + \sin \psi) \\ \frac{1}{2}(-\cos \psi + \sin \psi \sqrt{3}) \\ 0 \end{pmatrix} \dots \\ &\dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dP_1 + dP_2 + dP_3 \end{pmatrix} \\ &= -dk(\Omega r + V \sin \psi)^2 \begin{pmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix} - dk[\Omega r - \frac{V}{2}(-\cos \psi \sqrt{3} + \sin \psi)]^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-\cos \psi \sqrt{3} + \sin \psi) \\ \frac{1}{2}(-\cos \psi - \sin \psi \sqrt{3}) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\dots - dk[\Omega r - \frac{V}{2}(\cos \psi \sqrt{3} + \sin \psi)]^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\cos \psi \sqrt{3} + \sin \psi) \\ \frac{1}{2}(-\cos \psi + \sin \psi \sqrt{3}) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dkf[(\Omega r + V \sin \psi)^2 + (\Omega r - \frac{V}{2}(-\cos \psi \sqrt{3} + \sin \psi))^2 + (\Omega r - \frac{V}{2}(\cos \psi \sqrt{3} + \sin \psi))^2] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La composante de  $d\vec{F}$  sur  $\vec{x}$  est :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{F} \cdot \vec{x}}{dk} &= (\Omega r + V \sin \psi)^2 \sin \psi - [\Omega r - \frac{V}{2}(-\cos \psi \sqrt{3} + \sin \psi)]^2 \frac{1}{2}(-\cos \psi \sqrt{3} + \sin \psi) \\ &\quad - [\Omega r - \frac{V}{2}(\cos \psi \sqrt{3} + \sin \psi)]^2 \frac{1}{2}(\cos \psi \sqrt{3} + \sin \psi) \\ \implies \frac{2d\vec{F} \cdot \vec{x}}{dk} &= 2(\Omega r + V \sin \psi)^2 \sin \psi - [\Omega r - \frac{V}{2}(-\cos \psi \sqrt{3} + \sin \psi)]^2 (-\cos \psi \sqrt{3} + \sin \psi) \\ &\quad - [\Omega r - \frac{V}{2}(\cos \psi \sqrt{3} + \sin \psi)]^2 (\cos \psi \sqrt{3} + \sin \psi) \\ &= 2(\Omega r + V \sin \psi)^2 \sin \psi \\ &\quad + \cos \psi \sqrt{3} \left[ [\Omega r - \frac{V}{2}(-\cos \psi \sqrt{3} + \sin \psi)]^2 - [\Omega r - \frac{V}{2}(\cos \psi \sqrt{3} + \sin \psi)]^2 \right] \\ &\quad - \sin \psi \left[ [\Omega r - \frac{V}{2}(-\cos \psi \sqrt{3} + \sin \psi)]^2 + [\Omega r - \frac{V}{2}(\cos \psi \sqrt{3} + \sin \psi)]^2 \right] \\ &= 2(\Omega r + V \sin \psi)^2 \sin \psi \\ &\quad + 4 \cos \psi \sqrt{3} \frac{V}{2} \cos \psi \sqrt{3} \left[ \Omega r - \frac{V}{2} \sin \psi \right] \\ &\quad - \sin \psi \left[ 2(\Omega^2 r^2 + \frac{V^2}{4}(3 \cos^2 \psi + \sin^2 \psi)) - 4\Omega r \frac{V}{2} \sin \psi \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \sin \psi \left[ \Omega^2 r^2 + V^2 \sin^2 \psi + 2\Omega r V \sin \psi - \Omega^2 r^2 - \frac{V^2}{4}(3 \cos^2 \psi + \sin^2 \psi) + \Omega r V \sin \psi \right] \\
&\quad + 6 \cos^2 \psi V \left[ \Omega r - \frac{V}{2} \sin \psi \right] \\
&= 2 \sin \psi \left[ \frac{V^2}{4}(3 \sin^2 \psi - 3 \cos^2 \psi) + 3\Omega r V \sin \psi \right] + 6 \cos^2 \psi V \left[ \Omega r - \frac{V}{2} \sin \psi \right] \\
&= \sin \psi \left[ \frac{V^2}{2}(3 \sin^2 \psi - 3 \cos^2 \psi) + 6\Omega r V \sin \psi \right] + 6V\Omega r \cos^2 \psi - 6\frac{V^2}{2} \cos^2 \psi \sin \psi \\
&= \frac{V^2}{2}(3 \sin^2 \psi - 9 \cos^2 \psi) \sin \psi + 6\Omega r V \sin^2 \psi + 6\Omega r V \cos^2 \psi \\
&= \frac{V^2}{2}(3 \sin^2 \psi - 9 \cos^2 \psi) \sin \psi + 6\Omega r V \\
\Rightarrow \quad d\vec{F} \cdot \vec{x} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{V^2}{2}(3 \sin^2 \psi - 9 \cos^2 \psi) \sin \psi + 6\Omega r V \right] dk
\end{aligned}$$

Le premier terme de cette composante de force varie autour d'une valeur moyenne nulle alors que le second est constant quelque soit l'angle  $\psi$ .

$$(d\vec{F} \cdot \vec{x})_{\text{moy}} = 3\Omega r V dk = \frac{3}{2}\rho C_x \Omega V r dS$$

La composante de  $d\vec{F}$  sur  $\vec{y}$  est :

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{F} \cdot \vec{y}}{dk} &= -(\Omega r + V \sin \psi)^2 \cos \psi - \left[ \Omega r - \frac{V}{2}(-\cos \psi \sqrt{3} + \sin \psi) \right]^2 \frac{1}{2}(-\cos \psi - \sin \psi \sqrt{3}) \\
&\quad - \left[ \Omega r - \frac{V}{2}(\cos \psi \sqrt{3} + \sin \psi) \right]^2 \frac{1}{2}(-\cos \psi + \sin \psi \sqrt{3}) \\
\Rightarrow \quad \frac{2d\vec{F} \cdot \vec{y}}{dk} &= -2(\Omega r + V \sin \psi)^2 \cos \psi \\
&\quad + \cos \psi \left[ \left[ \Omega r - \frac{V}{2}(-\cos \psi \sqrt{3} + \sin \psi) \right]^2 + \left[ \Omega r - \frac{V}{2}(\cos \psi \sqrt{3} + \sin \psi) \right]^2 \right] \\
&\quad + \sqrt{3} \sin \psi \left[ \left[ \Omega r - \frac{V}{2}(-\cos \psi \sqrt{3} + \sin \psi) \right]^2 - \left[ \Omega r - \frac{V}{2}(\cos \psi \sqrt{3} + \sin \psi) \right]^2 \right] \\
&= -2 \cos \psi \left[ \Omega^2 r^2 + V^2 \sin^2 \psi + 2\Omega r V \sin \psi \right] \\
&\quad + 2 \cos \psi \left[ \Omega^2 r^2 + \frac{V^2}{4}(3 \cos^2 \psi + \sin^2 \psi) - 2\Omega r \frac{V}{2} \sin \psi \right] \\
&\quad - 4\sqrt{3} \sin \psi \frac{V}{2} \cos \psi \sqrt{3} \left[ \Omega r + \frac{V}{2} \sin \psi \right] \\
&= 2 \cos \psi \left[ \frac{V^2}{4}(3 \cos^2 \psi - 3 \sin^2 \psi) - 3\Omega r V \sin \psi \right] - 6 \cos \psi \sin \psi V \left[ \Omega r + \frac{V}{2} \sin \psi \right] \\
&= 2 \cos \psi \left[ \frac{V^2}{4}(3 \cos^2 \psi - 3 \sin^2 \psi) - 3\Omega r V \sin \psi - 3 \sin \psi \Omega r V - \frac{3}{2} \sin \psi V^2 \sin \psi \right] \\
&= 2 \cos \psi \left[ \frac{V^2}{4}(3 \cos^2 \psi - 9 \sin^2 \psi) - 6\Omega r V \sin \psi \right] \\
\Rightarrow \quad d\vec{F} \cdot \vec{y} &= \cos \psi \left[ \frac{V^2}{4}(3 \cos^2 \psi - 9 \sin^2 \psi) - 6\Omega r V \sin \psi \right] dk
\end{aligned}$$

Cette composante de force varie autour d'une valeur moyenne nulle.

La composante de  $d\vec{F}$  sur  $\vec{z}$  est :

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{F} \cdot \vec{z}}{f dk} &= (\Omega^2 r^2 + V^2 \sin^2 \psi + 2\Omega r V \sin \psi) \\
&\dots + (\Omega^2 r^2 + \frac{3V^2}{4} \cos^2 \psi + \frac{V^2}{4} \sin^2 \psi + \Omega r V \cos \psi \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}V^2}{2} \cos \psi \sin \psi - \Omega r V \sin \psi) \\
&\dots + (\Omega^2 r^2 + \frac{3V^2}{4} \cos^2 \psi + \frac{V^2}{4} \sin^2 \psi - \Omega r V \cos \psi \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}V^2}{2} \cos \psi \sin \psi - \Omega r V \sin \psi) \\
&= 3\Omega^2 r^2 + \frac{6}{4}V^2(\sin^2 \psi + \cos^2 \psi) = 3 \left[ \Omega^2 r^2 + \frac{1}{4}V^2 \right] \\
\Rightarrow d\vec{F} \cdot \vec{z} &= \frac{3}{2}\rho C_z (\Omega^2 r^2 + \frac{1}{2}V^2) dS
\end{aligned}$$

On remarque essentiellement que cette composante de force élémentaire ne dépend pas de  $\psi$  !

Nous avons obtenu la force élémentaire moyenne (sur 1 tour) exercée sur l'ensemble des surfaces élémentaires analogues des 3 pales. Pour obtenir la force globale sur le tripale il suffit d'intégrer chacune des composantes :

$$(\vec{F} \cdot \vec{x})_{moy} = \int_{r_0}^R \frac{3}{2}\rho C_x \Omega V r dS = \frac{3}{2}\rho C_x \Omega V \int_{r_0}^R r dS = \frac{1}{2}\rho C_x \Omega V (3A)$$

$$\begin{aligned}
\vec{F} \cdot \vec{z} &= \int_{r_0}^R \frac{3}{2}\rho C_z (\Omega^2 r^2 + \frac{1}{2}V^2) dS = \frac{3}{2}\rho C_z \left( \Omega^2 \int_{r_0}^R r^2 dS + \frac{1}{2}V^2 \int_{r_0}^R dS \right) \\
&= \frac{3}{2}\rho C_z \left( \Omega^2 I + \frac{1}{2}V^2 S \right) = \frac{1}{2}\rho C_z \left( \Omega^2 3I + \frac{1}{2}V^2 3S \right)
\end{aligned}$$

où  $I$ ,  $A$ , et  $S$  désignent respectivement les moments quadratique et statique et la section d'une pale et  $3I$ ,  $3A$  et  $3S$  les moments quadratique et statique et la section du tripale.

## 1.4 Moment en $O$

Le moment en  $O$  de la force  $d\vec{F}_i$  possède une composante sur  $\vec{z}$  qui provient de  $dT_i$  et des composantes suivant  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  qui proviennent de  $dP_i$  :

$$d\vec{M}_i(O) = -r dP_i \vec{e}_{\theta i} - r dT_i \vec{z}$$

et le moment en  $O$  de la force élémentaire exercée sur l'ensemble des surfaces élémentaires analogues des 3 pales.

$$\begin{aligned}
d\vec{M}(O) = \sum_{i=1}^3 d\vec{M}_i(O) &\Rightarrow \frac{d\vec{M}(O)}{-r} = \sum_{i=1}^3 V_{\infty i}^2 dP_i \vec{e}_{\theta i} + \vec{z} \sum_{i=1}^3 dT_i \\
&= f dk \sum_{i=1}^3 V_{\infty i}^2 \vec{e}_{\theta i} + \vec{z} dk \sum_{i=1}^3 V_{\infty i}^2
\end{aligned}$$

Effectuons les 2 sommes une à une :  
la seconde :

$$\sum_{i=1}^3 V_{\infty i}^2 = (\Omega r + V \sin \psi)^2 + [\Omega r - \frac{V}{2}(-\cos \psi \sqrt{3} + \sin \psi)]^2 + [\Omega r - \frac{V}{2}(\cos \psi \sqrt{3} + \sin \psi)]^2$$

$$\begin{aligned}
&= [\Omega^2 r^2 + V^2 \sin^2 \psi + 2\Omega r V \sin \psi] \\
&+ [\Omega^2 r^2 + \frac{V^2}{4}(3 \cos^2 \psi + \sin^2 \psi) + 2\Omega r \frac{V}{2} \cos \psi \sqrt{3} - 2\Omega r \frac{V}{2} \sin \psi - 2 \frac{V^2}{4} \cos \psi \sqrt{3} \sin \psi] \\
&+ [\Omega^2 r^2 + \frac{V^2}{4}(3 \cos^2 \psi + \sin^2 \psi) - 2\Omega r \frac{V}{2} \cos \psi \sqrt{3} - 2\Omega r \frac{V}{2} \sin \psi + 2 \frac{V^2}{4} \cos \psi \sqrt{3} \sin \psi] \\
&= [3\Omega^2 r^2 + V^2 \sin^2 \psi + 2\Omega r V \sin \psi + \frac{V^2}{2}(3 \cos^2 \psi + \sin^2 \psi) - 4\Omega r \frac{V}{2} \sin \psi] \\
&= [3\Omega^2 r^2 + \frac{3V^2}{2}(\cos^2 \psi + \sin^2 \psi)] \\
&= [3\Omega^2 r^2 + \frac{3V^2}{2}]
\end{aligned}$$

ce qui nous donne :

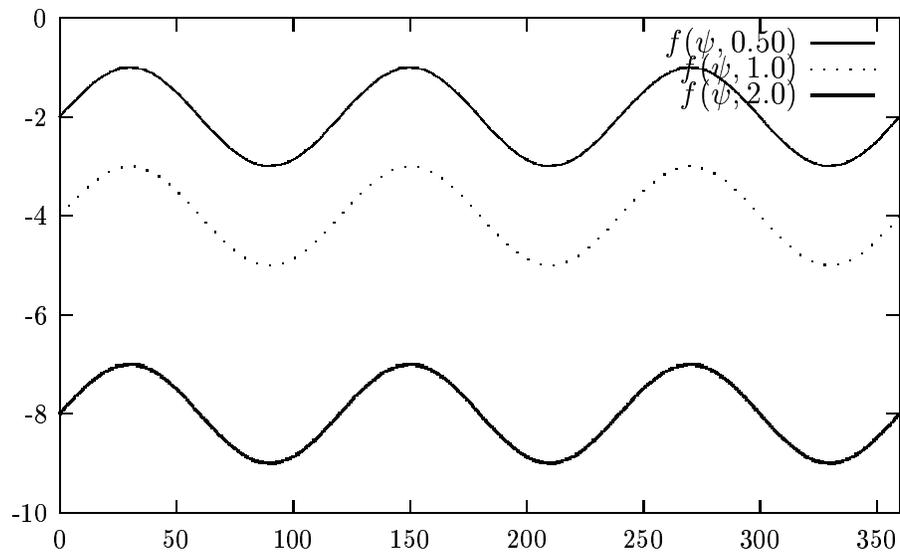
$$d\vec{M}(O) \cdot \vec{z} = -[3\Omega^2 r^2 + \frac{3V^2}{2}] r dk = -\frac{1}{2} \rho C_x \left[ 3\Omega^2 r^2 + \frac{3V^2}{2} \right] r dS$$

la première :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^3 V_{\infty i}^2 \vec{e}_{\theta i} &= (\Omega r + V \sin \psi)^2 \begin{pmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y})} \\
&\dots + [\Omega r - \frac{V}{2}(-\cos \psi \sqrt{3} + \sin \psi)]^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-\cos \psi \sqrt{3} + \sin \psi) \\ \frac{1}{2}(-\cos \psi - \sin \psi \sqrt{3}) \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y})} \\
&\dots + [\Omega r - \frac{V}{2}(\cos \psi \sqrt{3} + \sin \psi)]^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\cos \psi \sqrt{3} + \sin \psi) \\ \frac{1}{2}(-\cos \psi + \sin \psi \sqrt{3}) \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y})}
\end{aligned}$$

Calculons chacune des composantes de ce vecteur :

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{M}(O) \cdot \vec{x}}{-r f dk} &= -(\Omega^2 r^2 + V^2 \sin^2 \psi + 2\Omega r V \sin \psi) \sin \psi \\
&\dots + (\Omega^2 r^2 + \frac{3V^2}{4} \cos^2 \psi + \frac{V^2}{4} \sin^2 \psi + \Omega r V \cos \psi \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}V^2}{2} \cos \psi \sin \psi - \Omega r V \sin \psi) \frac{1}{2}(-\cos \psi \sqrt{3} + \sin \psi) \\
&\dots + (\Omega^2 r^2 + \frac{3V^2}{4} \cos^2 \psi + \frac{V^2}{4} \sin^2 \psi - \Omega r V \cos \psi \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}V^2}{2} \cos \psi \sin \psi - \Omega r V \sin \psi) \frac{1}{2}(\cos \psi \sqrt{3} + \sin \psi) \\
&= -(\Omega^2 r^2 + V^2 \sin^2 \psi + 2\Omega r V \sin \psi) \sin \psi \\
&\dots + (\Omega^2 r^2 + \frac{3V^2}{4} \cos^2 \psi + \frac{V^2}{4} \sin^2 \psi - \Omega r V \sin \psi) \sin \psi \\
&\dots - (\Omega r V \cos \psi \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}V^2}{2} \cos \psi \sin \psi) \cos \psi \sqrt{3} \\
&= (\frac{3V^2}{4} \cos^2 \psi - \frac{3V^2}{4} \sin^2 \psi - 3\Omega r V \sin \psi) \sin \psi - (3\Omega r V \cos^2 \psi - \frac{3V^2}{2} \cos^2 \psi \sin \psi) \\
&= (\frac{9V^2}{4} \cos^2 \psi - \frac{3V^2}{4} \sin^2 \psi) \sin \psi - 3\Omega r V (\sin^2 \psi + \cos^2 \psi) \\
&= \frac{3V^2}{4} (3 \cos^2 \psi - \sin^2 \psi) \sin \psi - 3\Omega r V \\
\Rightarrow d\vec{M}(O) \cdot \vec{x} &= -\frac{3fV^2}{4} \underbrace{\left[ (4 \cos^2 \psi - 1) \sin \psi - 4 \frac{\Omega r}{V} \right]}_{f(\psi, \frac{\Omega r}{V})} r dk
\end{aligned}$$

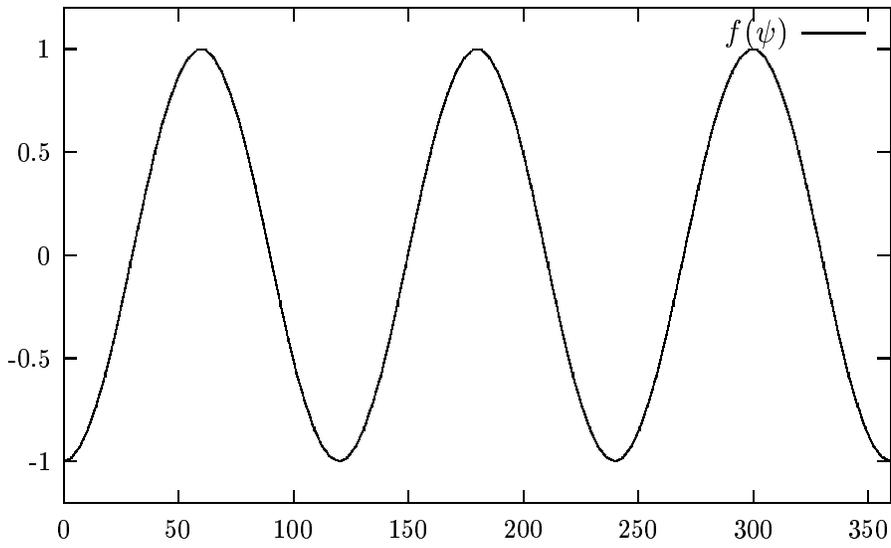


Cette composante de moment élémentaire varie autour d'une valeur moyenne :

$$d\vec{M}(O)_{moy} \cdot \vec{x} = 3fV\Omega r^2 dk = \frac{1}{2}\rho C_z 3V\Omega r^2 dS$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{M}(O) \cdot \vec{y}}{-rf dk} &= (\Omega^2 r^2 + V^2 \sin^2 \psi + 2\Omega r V \sin \psi) \cos \psi \\
\dots &+ (\Omega^2 r^2 + \frac{3V^2}{4} \cos^2 \psi + \frac{V^2}{4} \sin^2 \psi + \Omega r V \cos \psi \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}V^2}{2} \cos \psi \sin \psi - \Omega r V \sin \psi) \frac{1}{2} (-\cos \psi - \sin \psi \sqrt{3}) \\
\dots &+ (\Omega^2 r^2 + \frac{3V^2}{4} \cos^2 \psi + \frac{V^2}{4} \sin^2 \psi - \Omega r V \cos \psi \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}V^2}{2} \cos \psi \sin \psi - \Omega r V \sin \psi) \frac{1}{2} (-\cos \psi + \sin \psi \sqrt{3}) \\
&= (\Omega^2 r^2 + V^2 \sin^2 \psi + 2\Omega r V \sin \psi) \cos \psi \\
\dots &- (\Omega^2 r^2 + \frac{3V^2}{4} \cos^2 \psi + \frac{V^2}{4} \sin^2 \psi - \Omega r V \sin \psi) \cos \psi \\
\dots &- (\Omega r V \cos \psi \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}V^2}{2} \cos \psi \sin \psi) \sin \psi \sqrt{3} \\
&= (-\frac{3V^2}{4} \cos^2 \psi + \frac{3V^2}{4} \sin^2 \psi + 3\Omega r V \sin \psi) \cos \psi - (3\Omega r V \cos \psi \sin \psi - \frac{3V^2}{2} \cos \psi \sin^2 \psi) \\
&= (-\frac{3V^2}{4} \cos^2 \psi + \frac{9V^2}{4} \sin^2 \psi) \cos \psi \\
&= \frac{3V^2}{4} (3 \sin^2 \psi - \cos^2 \psi) \cos \psi \\
\Rightarrow d\vec{M}(O) \cdot \vec{y} &= -\frac{3fV^2}{4} \underbrace{(4 \sin^2 \psi - 1) \cos \psi}_{f(\psi)} r dk
\end{aligned}$$

Cette composante de moment élémentaire varie autour d'une valeur moyenne nulle du fait de l'hypothèse sur la position du centre de poussée sur le profil ( $\vec{OP} = r\vec{e}_r$ ) : c'est cette composante de moment qui a tendance à faire monter ou descendre le tripale suivant la position de ce centre de poussée sur le profil.



En considérant les valeurs moyennes de  $d\vec{M}(O)$ , on peut évaluer (la valeur moyenne) du moment en  $O$  de l'action de l'air sur l'ensemble du tripale :

$$\begin{aligned}\vec{M}(O) &= \int_{r_0}^R d\vec{M}(O) = \frac{3}{2}\rho C_z V \Omega \int_{r_0}^R r^2 dS \vec{x} - \frac{3}{2}\rho C_x \left[ \Omega^2 \int_{r_0}^R r^3 dS + \frac{V^2}{2} \int_{r_0}^R r dS \right] \vec{z} \\ &= \frac{3}{2}\rho C_z V \Omega I \vec{x} - \frac{3}{2}\rho C_x \left[ \Omega^2 Q + \frac{V^2}{2} A \right] \vec{z}\end{aligned}$$

On remarque à nouveau l'expression des moments "quintique"  $Q$ , quadratique  $I$  et statique  $A$  d'une pale  $i$ .

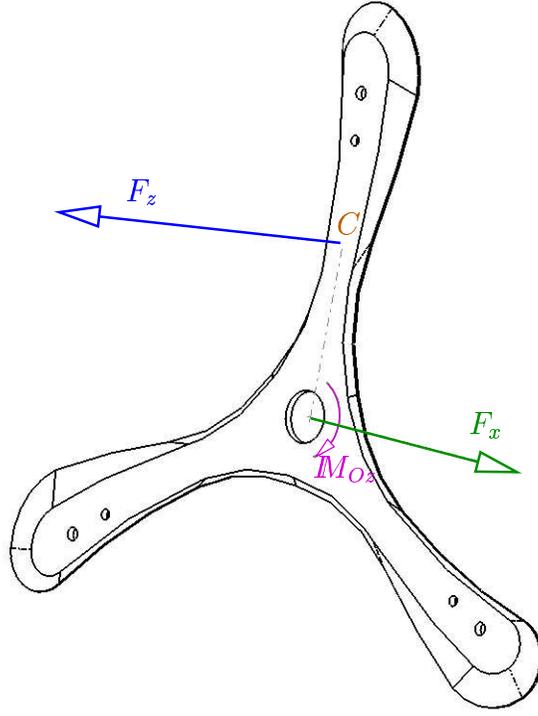
## 1.5 Résumé

On vient donc de modéliser l'action de l'air sur le tripale. Sa valeur moyenne lorsque le tripale tourne est représentée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{moy} = \begin{pmatrix} F_x = \frac{3}{2}\rho C_x \Omega V A \\ 0 \\ F_z = \frac{3}{2}\rho C_z \left[ \Omega^2 I + \frac{1}{2} V^2 S \right] \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad \begin{array}{l} \text{: Trainée} \\ \text{: Portance} \end{array} \\ \\ \vec{M}(O)_{moy} = \begin{pmatrix} M_{Ox} = \frac{3}{2}\rho C_z \Omega V I \\ 0 \\ M_{Oz} = -\frac{3}{2}\rho C_x \left[ \Omega^2 Q + \frac{1}{2} V^2 A \right] \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad \begin{array}{l} \text{: entraine l'effet gyroscopique} \\ \text{: freine la rotation propre } \Omega \end{array} \end{array} \right.$$

$$\text{où } S = \int_{r_0}^R dS \quad , \quad A = \int_{r_0}^R r dS \quad , \quad I = \int_{r_0}^R r^2 dS \quad , \quad Q = \int_{r_0}^R r^3 dS$$

sont les caractéristiques géométriques d'une pale.



La valeur "instantanée" de l'action de l'air sur le tripale est quant à elle donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F} = \left( \begin{array}{l} F_x = \frac{3}{2}\rho C_x \left[ \Omega V A + \frac{V^2}{4}(\sin^2 \psi - 3 \cos^2 \psi) \sin \psi S \right] \\ F_y = \frac{3}{2}\rho C_x \cos \psi \left[ \frac{V^2}{4}(\cos^2 \psi - 3 \sin^2 \psi) S - 2\Omega V \sin \psi A \right] \\ F_z = \frac{3}{2}\rho C_z \left[ \Omega^2 I + \frac{1}{2}V^2 S \right] \end{array} \right)_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \\ \\ \vec{M}(O) = \left( \begin{array}{l} M_{Ox} = \frac{3}{2}\rho C_z \left[ \Omega V I - \frac{V^2}{8}[(4 \cos^2 \psi - 1) \sin \psi A] \right] \\ M_{Oy} = -\frac{3}{2}\rho C_z \frac{V^2}{4}(4 \sin^2 \psi - 1) \cos \psi A \\ M_{Oz} = -\frac{3}{2}\rho C_x \left[ \Omega^2 Q + \frac{1}{2}V^2 A \right] \end{array} \right)_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \end{array} \right.$$

### 1.5.1 Comparaison avec le modèle du British

Le British donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_z = \frac{1}{4}\rho C_z (a^2 \Omega^2 + V^2) A_s \\ M_{Ox} = \frac{1}{4}\rho V a^2 \Omega C_z A_s \end{array} \right.$$

En comparant ces équations et les miennes, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} 3I = \frac{a^2}{2} A_s \\ 3S = A_s \end{array} \right. \implies a^2 = \frac{2I}{S}$$

$A_s$  est alors la surface du tripale alors que le British annonce que c'est la surface balayée  $A_s = \pi a^2$  ? ! ce qui définit une seconde fois  $a$  ? !

On retrouvera le terme  $\frac{2I}{S}$  dans les calculs suivants.

### 1.5.2 centre de poussée $C$

On ne peut chercher le centre de poussée que s'il existe c-à-d que si  $\vec{F} \perp \vec{M}_O$ . On ne va donc considérer que certaines composantes à savoir :  $F_z$ ,  $M_{Ox}$  et  $M_{Oy}$ .

Déterminons la position du centre de poussée  $C$  situé dans le plan du tripale au même niveau que  $O$  :  $\vec{OC} = a\vec{x} + b\vec{y}$  qui est caractérisé par :

$$\begin{aligned} \vec{M}(C) = \vec{0} &\implies \vec{M}(O) + \vec{F} \wedge \vec{OC} = \vec{0} \implies -\vec{M}(O) = \vec{F} \wedge \vec{OC} \\ - \begin{pmatrix} M_{Ox} \\ M_{Oy} \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -bF_z \\ aF_z \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} M_{Ox} = bF_z \\ M_{Oy} = -aF_z \end{cases} \implies \begin{cases} b = \frac{M_{Ox}}{F_z} \\ a = -\frac{M_{Oy}}{F_z} \end{cases} \\ \implies \begin{cases} b = \frac{[\Omega VI - \frac{V^2}{8} [(4 \cos^2 \psi - 1) \sin \psi A]]}{[\Omega^2 I + \frac{1}{2} V^2 S]} = \frac{[I - \frac{V}{8\Omega} [(4 \cos^2 \psi - 1) \sin \psi A]]}{[\frac{\Omega}{V} I + \frac{V}{2\Omega} S]} \\ a = \frac{\frac{V^2}{4} (4 \sin^2 \psi - 1) \cos \psi A}{[\Omega^2 I + \frac{1}{2} V^2 S]} = \frac{(4 \sin^2 \psi - 1) \cos \psi A}{[4 \frac{\Omega^2}{V^2} I + 2S]} \end{cases} \end{aligned}$$

Vu que  $M_{Ox}$ ,  $M_{Oy}$  sont fonction de  $\psi$  ( $F_z$  n'est pas fonction de  $\psi$ ), la position du centre de poussée va évoluer en fonction de  $\psi$  :  $b(\psi)$  et  $a(\psi)$ .

Jérôme Royo (cf magazine Profil n°21) a eu l'idée de connaître la position du centre de poussée lors d'un tour du boomerang. On peut alors connaître avec ce qui précède la position de  $C$  sur 1 tour (ou plutôt sur 1/3 de tour) mais on s'aperçoit qu'elle dépend des valeurs de  $\Omega$  et  $V$  pour un tripale donné !

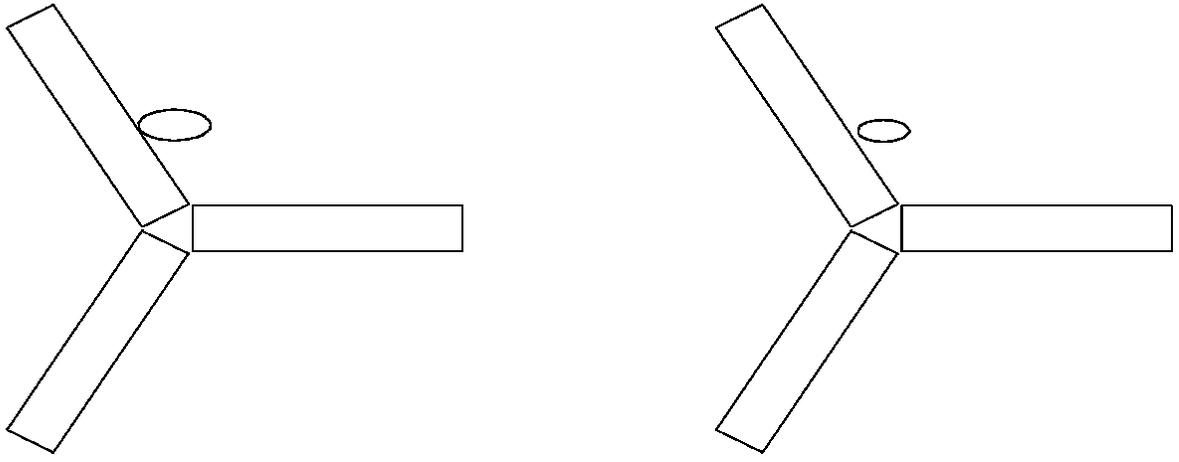


FIG. 1.4 – Evolution de la position du centre de poussée sur un tour d'un tripale défini par largeur de pale  $c = 30$  mm, rayon maxi  $R = 160$  mm et mini  $r_0 = 10$  mm pour une vitesse linéaire  $V = 12$  m.s<sup>-1</sup> et pour 2 vitesses de rotation différentes  $\Omega = 15$  tr/s (à gauche  $\frac{V}{\Omega} \approx 0.127$  m) et  $\Omega = 20$  tr/s (à droite  $\frac{V}{\Omega} \approx 0.095$  m)

En considérant les valeurs moyennes des efforts, la position moyenne du centre de poussée est donnée par :

$$\vec{OC}_{moy} = b_{moy}\vec{y} \quad \text{avec}$$

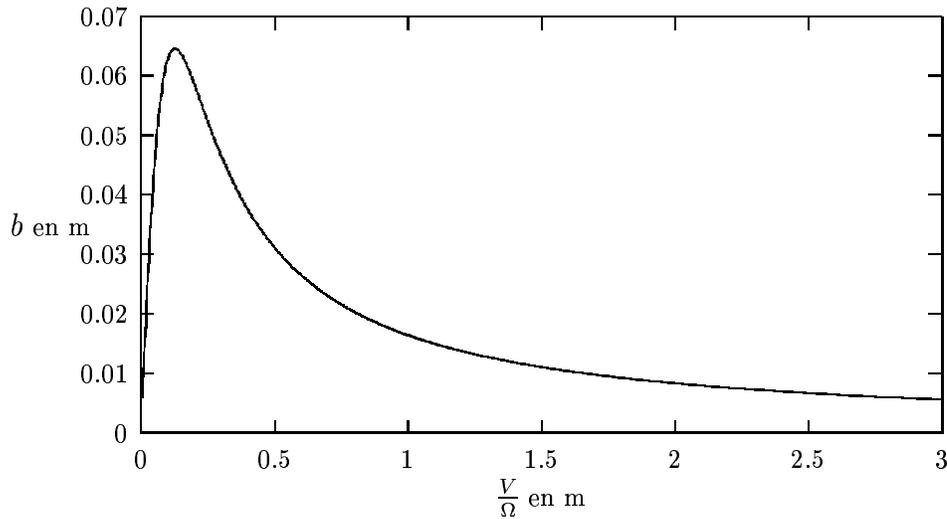
$$b_{moy} = \frac{3}{2}\rho IC_z V \Omega \frac{2}{3\rho C_z} \left( \Omega^2 I + \frac{1}{2} V^2 S \right)^{-1} = \frac{IV\Omega}{\Omega^2 I + \frac{1}{2} V^2 S} = \frac{1}{\frac{\Omega}{V} + \frac{S}{2I} \frac{V}{\Omega}}$$

Pour une pale rectangulaire où  $R \approx 15.8$  cm et  $r_0 \ll R$  on a (cf paragraphe 1.6.1) :

$$\frac{S}{2I} \approx \frac{3}{2R^2} = 60 \text{ m}^{-2}$$

On peut alors examiner la position moyenne du centre de poussée est fonction du rapport  $\frac{V}{\Omega}$  exprimé en m.

Pale rectangulaire de longueur 15.8 cm



Le maximum de cette courbe situé pour  $\frac{V}{\Omega} \approx 0.13$  m laisse prétendre qu'il existe une valeur optimum de ce rapport qui donnera un centre de poussée le plus éloigné possible (6.4 cm soit  $4/10^{\text{ème}}$  de  $R$ ) du centre de gravité  $O$  donc un effet gyroscopique plus important bien qu'il faille faire attention à ce genre de phrase! La comparaison doit être faite avec des termes constants!

Pour avoir une idée :

- si  $\Omega = 15$  tr/s alors ce maximum est pour  $V \approx 12$  m/s  $\approx 44$  km.h<sup>-1</sup>. A cette vitesse linéaire, un tripale d'une portée de 20 m ( $2 \cdot \text{rayon}$ ) parcourt environ 62 m ( $2\pi \cdot \text{rayon}$ ) en un temps de 5.1 s soit 58 vols lors d'un round d'endurance de 5mn, sans compter les temps de transition!
- si  $\Omega = 20$  tr/s alors ce maximum est pour  $V \approx 16.3$  m/s  $\approx 59$  km.h<sup>-1</sup>. A cette vitesse linéaire, un tripale d'une portée de 20 m ( $2 \cdot \text{rayon}$ ) parcourt environ 62 m ( $2\pi \cdot \text{rayon}$ ) en un temps de 3.85 s soit 78 vols lors d'un round d'endurance de 5mn, sans compter les temps de transition!

## 1.6 Section $S$ et moment quadratique $I$

### 1.6.1 Pale rectangulaire

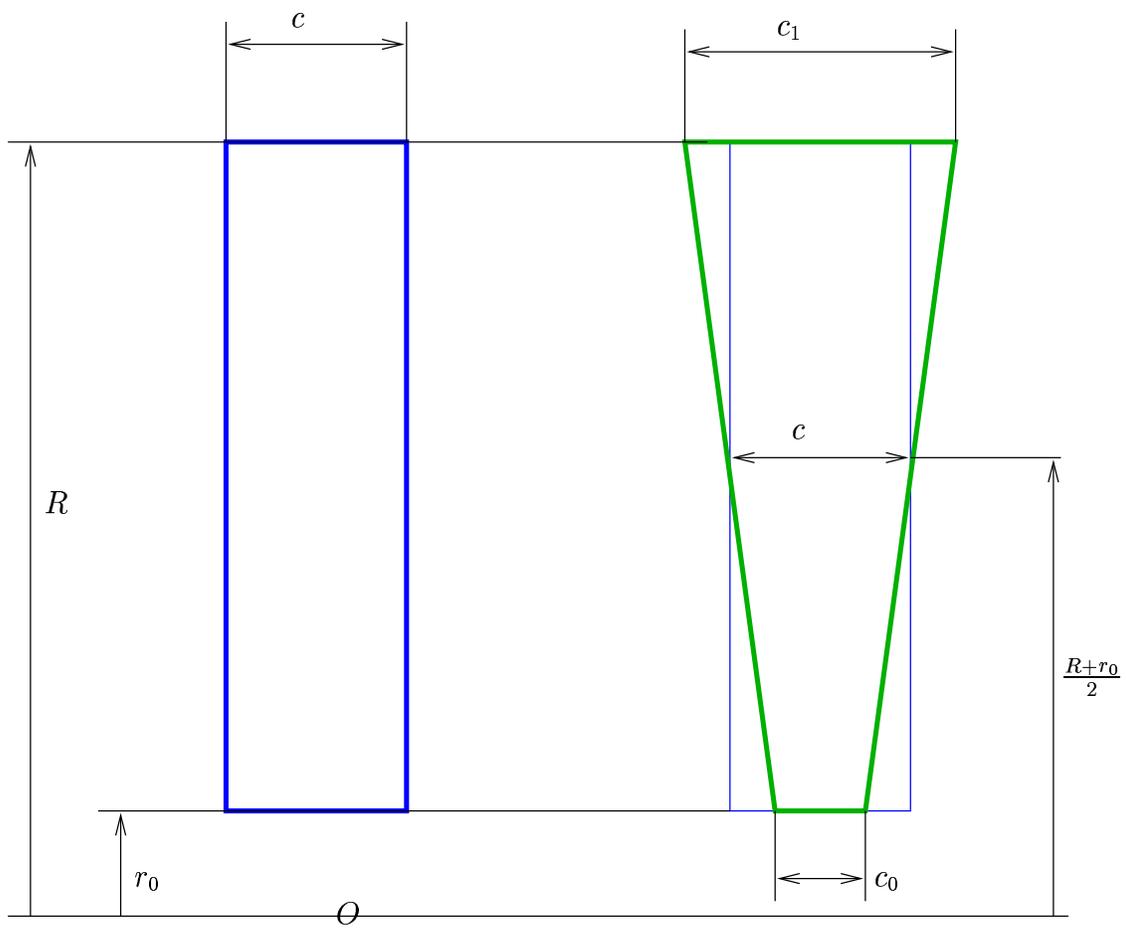
$$dS = c dr \implies S = (R - r_0)c$$

$$I = \int r^2 dS = c \int_{r_0}^R r^2 dr = \frac{c}{3}(R^3 - r_0^3)$$

$$\frac{S}{2I} = \frac{3(R - r_0)c}{2c(R^3 - r_0^3)} = \frac{3(R - r_0)}{2(R^3 - r_0^3)} \underset{r_0 \ll R}{\approx} \frac{3}{2R^2}$$

Si l'on souhaite regarder ce que vaut le paramètre  $a$  du British, on a :

$$a^2 = \frac{2I}{S} = \frac{2R^2}{3} \implies a = \sqrt{\frac{2}{3}}R \approx 0.81R$$



### 1.6.2 Pale trapézoïdale : Argh !

$$dS = c(r) dr \quad \text{où} \quad c(r) - c = A \left( r - \frac{R+r_0}{2} \right) \quad \text{avec} \quad A = \frac{c_1 - c_0}{R - r_0} = \frac{2c - c_0 - c_0}{R - r_0} = 2 \frac{c - c_0}{R - r_0}$$

$S = (R - r_0)c$  identique à la pale rectangulaire pour comparer

$$I = \int r^2 dS = \int r^2 c(r) dr = \int_{r_0}^R r^2 \left[ c + A \left( r - \frac{r_0 + R}{2} \right) \right] dr$$

$$\Rightarrow I = \left[ c - A \frac{R+r_0}{2} \right] \int_{r_0}^R r^2 dr + A \int_{r_0}^R r^3 dr = \left[ c - A \frac{R+r_0}{2} \right] \frac{1}{3} (R^3 - r_0^3) + \frac{A}{4} (R^4 - r_0^4)$$

$$= \left[ c - \frac{(c - c_0)(R+r_0)}{(R - r_0)} \right] \frac{(R^3 - r_0^3)}{3} + \frac{(c - c_0)(R^4 - r_0^4)}{2(R - r_0)}$$

$$= \frac{[c(R - r_0) - (c - c_0)(R + r_0)](R^3 - r_0^3)}{3(R - r_0)} + \frac{(c - c_0)(R^4 - r_0^4)}{2(R - r_0)}$$

$$= \frac{1}{6(R - r_0)} \left[ 2[-2cr_0 + c_0R + c_0r_0](R^3 - r_0^3) + 3(c - c_0)(R^4 - r_0^4) \right]$$

$$= \frac{1}{6(R - r_0)} \left[ -4cr_0R^3 + 2c_0R^4 + 2c_0r_0R^3 + 4cr_0^4 - 2c_0Rr_0^3 - 2c_0r_0^4 + 3cR^4 - 3cr_0^4 - 3c_0R^4 + 3c_0r_0^4 \right]$$

$$2I = \frac{1}{3(R - r_0)} \left[ -4cr_0R^3 + 2c_0r_0R^3 + cr_0^4 - 2c_0Rr_0^3 + 3cR^4 - c_0R^4 + c_0r_0^4 \right]$$

$$\frac{2I}{S} = \frac{1}{3c(R - r_0)^2} \left[ -4cr_0R^3 + 2c_0r_0R^3 + cr_0^4 - 2c_0Rr_0^3 + 3cR^4 - c_0R^4 + c_0r_0^4 \right]$$

Cette expression étant compliquée, posons  $c_0 = sc$  ( $s > 1$  : pale moins large à l'extrémité,  $0 < s < 1$  pale plus large à l'extrémité).

$$\frac{2I}{S} = \frac{1}{3(R-r_0)^2} \left[ -4r_0R^3 + 2sr_0R^3 + r_0^4 - 2sRr_0^3 + 3R^4 - sR^4 + sr_0^4 \right] \xrightarrow{r_0 \ll R} \frac{(3-s)R^4}{3R^2} = \frac{(3-s)R^2}{3}$$

$$\frac{S}{2I} \xrightarrow{r_0 \ll R} \frac{3}{(3-s)R^2} \xrightarrow{s=1} \frac{3}{2R^2}$$

On retrouve bien le résultat d'une pale rectangulaire en prenant un cas particulier de pale trapézoïdale.

En comparant les pales rectangulaire et trapézoïdale qui ont même surface mais 2 inerties différentes  $I_R$  et  $I_T$  on a, lorsque  $r_0 \ll R$  (pour simplifier la comparaison) :

$$\frac{S}{2I_R} = \frac{3}{2R^2} \quad \text{et} \quad \frac{S}{2I_T} = \frac{3}{(3-s)R^2}$$

Et au vue de l'expression de  $b$  :

$$b = \frac{1}{\frac{\Omega}{V} + \frac{S}{2I} \frac{V}{\Omega}}$$

en comparant à  $\Omega$  et  $V$  identiques on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } s > 1 \text{ pale moins large à l'extrémité : } \frac{S}{2I_R} < \frac{S}{2I_T} \implies b_R > b_T \\ \text{si } s < 1 \text{ pale plus large à l'extrémité : } \frac{S}{2I_R} > \frac{S}{2I_T} \implies b_R < b_T \end{array} \right.$$

D'où l'intérêt d'élargir la pale entre le centre du tripale et l'extrémité de la pale pour augmenter l'effet gyroscopique (attention à ce type de conclusion!).

## 1.7 Moments d'inertie et quadratique

Ne pas confondre les moments d'inertie  $J$  (exprimé en  $\text{kg.m}^2$ ) et quadratique  $I$  (exprimé en  $\text{m}^4$ ).

$$I = \int r^2 dS \quad \text{et} \quad J = \int r^2 dm$$

où  $dm = \rho e dS$  sans considérer la variation d'épaisseur du profil  
soit  $J = \rho e I$

où  $\rho$  est ici la masse volumique du tripale et non de l'air.

Rem : Dans le même principe, la masse  $\int dm = \int \rho e dS = \rho e \int dS = \rho e S$

Le British annonce  $J = \frac{1}{3}ma^2$ . Pour un tripale a pale rectangulaire où  $r_0 \ll R$  on a vu que :

$$I \approx \frac{S}{2}a^2 \implies J = \rho e \frac{S}{2}a^2 = \frac{1}{2}ma^2$$

## 1.8 Application numérique sur le "SPIN RACER"

### 1.8.1 Données géométriques

Le "Spin Racer" est caractérisé par les données approximatives :  $r_0 = 25 \text{ mm}$  ,  $R = 141 \text{ mm}$  ,  $c \approx 35 \text{ mm}$ , épaisseur 3.5 mm, densité matériau 1 ( $1 \text{ g.cm}^{-3}$ )

$$S = c(R - r_0) = 4060 \text{ mm}^2 \approx 40 \text{ cm}^2$$

$$A = \frac{c}{2}(R^2 - r_0^2) = 336980 \text{ mm}^3 \approx 337 \text{ cm}^3$$

$$I = \frac{c}{3}(R^3 - r_0^3) = 32521953 \text{ mm}^4 \approx 3252 \text{ cm}^4 \implies J = 1.138 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2$$

$$Q = \frac{c}{4}(R^4 - r_0^4) = 3455055940 \text{ mm}^5 \approx 34550 \text{ cm}^5$$

Par ailleurs, un logiciel de dessin industriel (Solid Works) permet de fournir  $S$  et  $I$  de manière moins approximative :

$$3S = 15990 - \pi r_0^2 = 14026 \text{ mm}^2 \implies S = 4675 \text{ mm}^2 \text{ soit } +15 \%$$

ainsi que

$$I = 33623066 \text{ mm}^4 \text{ soit } +3 \%$$

### 1.8.2 Efforts aérodynamiques

Prenons  $\Omega = 15 \text{ tr/s} \approx 94 \text{ rd/s}$  et  $V = 12 \text{ m/s}$  ainsi que  $C_x = 0.05$ ,  $C_z = 0.5$  et  $\rho = 1.2 \cdot 10^{-9} \text{ kg.m}^{-3}$ .

$$F_x = 0.034 \text{ N}$$

$$\Omega^2 I \approx 0.28 \text{ m}^4.\text{s}^{-2} \text{ et } \frac{1}{2}V^2 S \approx 0.29 \text{ m}^4.\text{s}^{-2}.$$

$$F_z = 0.52 \text{ N}$$

$$M_{Ox} = 0.033 \text{ N.m}$$

$$\Omega^2 Q \approx 0.030 \text{ m}^6.\text{s}^{-2} \text{ et } \frac{1}{2}V^2 A \approx 0.024 \text{ m}^6.\text{s}^{-2}.$$

$$M_{Oz} = -0.0049 \text{ N.m}$$

### 1.8.3 Autres efforts

En prenant une masse  $m = 35 \text{ g}$ , le poids du boom est de l'ordre de  $0.34 \text{ N}$

En considérant que la trajectoire du boom est un cercle de rayon  $r_1 = 10 \text{ m}$ , il "tourne" à une vitesse :

$$\frac{V}{r_1} = 1.2 \text{ rd.s}^{-1} (\approx 11.5) \text{ tr/mn}$$

ce qui fait un vol de  $5.2 \text{ s}$  pour ce tripale de  $20 \text{ m}$  de portée : ce qui est un peu important ! Le boom subit alors une accélération centrifuge :

$$\Gamma = \left(\frac{V}{r_1}\right)^2 r_1 = \frac{V^2}{r_1} = 14.4 \text{ rd.s}^{-2}$$

et une force due aux effets centrifuges :

$$m\Gamma = 0.5 \text{ N}$$

De plus  $M_{Oz}$  freine la rotation  $\Omega$ . On peut évaluer la variation de vitesse de rotation par :

$$\dot{\Omega} = \frac{M_{Oz}}{J} = -43 \text{ rd.s}^{-2} = -6.8 \text{ tr.s}^{-2}$$

soit une diminution de  $35 \text{ tr.s}^{-1}$  au bout des  $5.2 \text{ s}$  de vol !!! ce qui ne va plus !  $M_{Oz}$  est donc plus faible ! ?

# Chapitre 2

## Quadripale

### 2.1 Modification des hypothèses

La seule hypothèse modifiée provient de la forme : quadripale de pales identiques à  $90^\circ$  ;

### 2.2 Modélisation de l'action air-boomerang

La modélisation de la force élémentaire exercée sur une surface élémentaire d'aire  $dS = c(r)dr$  de la pale  $i$ , de largeur  $c(r)$ , est identique :

$$d\vec{F}_i = -dT_i \vec{e}_{\theta_i} + dP_i \vec{z} \quad \text{avec} \quad i \in [1; 4] \quad \text{où} \quad \begin{cases} dT_i = \frac{1}{2}\rho dS C_x V_{\infty i}^2 = dk V_{\infty i}^2 \\ dP_i = \frac{1}{2}\rho dS C_z V_{\infty i}^2 = dk f V_{\infty i}^2 \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} dk = \frac{1}{2}\rho C_x dS \\ f = \frac{C_z}{C_x} \end{cases}$$

Avec une vitesse  $V_{\infty i}$  différente pour chaque pale  $i$  :

$$V_{\infty i} = (\Omega r \vec{e}_{\theta_i} - V \vec{x}) \cdot \vec{e}_{\theta_i} = \Omega r - V \vec{x} \cdot \vec{e}_{\theta_i}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{e}_{\theta_1} = -\vec{x} \cdot \vec{e}_{\theta_3} = -\sin \psi$$

$$\vec{x} \cdot \vec{e}_{\theta_2} = -\vec{x} \cdot \vec{e}_{\theta_4} = -\cos \psi$$

soit

$$V_{\infty 1} = \Omega r + V \sin \psi$$

$$V_{\infty 2} = \Omega r + V \cos \psi$$

$$V_{\infty 3} = \Omega r - V \sin \psi$$

$$V_{\infty 4} = \Omega r - V \cos \psi$$

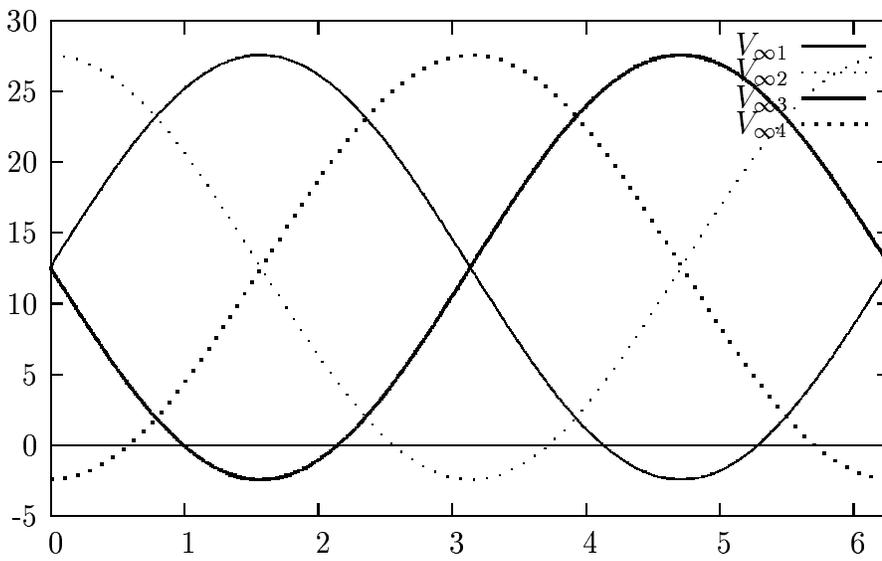


FIG. 2.1 – Evolution de la vitesse de l'air par rapport à la pale sur un tour de celle-ci et cela pour chacune des 4 pales mais aussi pour  $r = 10$  cm,  $\Omega = 20$  tr.s<sup>-1</sup> et  $V = 15$  m.s<sup>-1</sup>

On remarque alors que  $V_{\infty i}$  peut être négatif : cela signifie que ce n'est plus le bord d'attaque qui attaque l'air mais le bord de fuite! Le modèle précédent est alors incorrect car il ne gère pas ce phénomène. En effet pour les profils où  $V_{\infty i} < 0$ , il faudrait écrire :

$$d\vec{F}_i = +dT_i\vec{e}_{\theta_i} + dP_i\vec{z}$$

avec  $dT_i = \frac{1}{2}\rho dS C'_x V_{\infty i}^2$  et  $dP_i = \frac{1}{2}\rho dS C'_z V_{\infty i}^2$

où  $C'_x$  et  $C'_z$  seraient les coefficients aérodynamiques du profil pris en sens inverse.

## 2.3 Force

Il faut alors faire la somme des forces élémentaires sur tout le boomerang. Pour effectuer cette somme regroupons les forces élémentaires exercées sur chacune des 3 pales :

$$d\vec{F} = d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2 + d\vec{F}_3 + d\vec{F}_4 = -dT_1\vec{e}_{\theta_1} - dT_2\vec{e}_{\theta_2} - dT_3\vec{e}_{\theta_3} - dT_4\vec{e}_{\theta_4} + dP_1\vec{z} + dP_2\vec{z} + dP_3\vec{z} + dP_4\vec{z}$$

projettons dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  :

$$\vec{e}_{\theta_1} = -\vec{e}_{\theta_3} = \begin{pmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y})} \quad \vec{e}_{\theta_2} = -\vec{e}_{\theta_4} = \begin{pmatrix} -\cos \psi \\ -\sin \psi \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y})}$$

soit pour la force élémentaire sur les 4 pales :

$$d\vec{F} = \begin{pmatrix} (dT_1 - dT_3) \sin \psi + (dT_2 - dT_4) \cos \psi \\ -(dT_1 - dT_3) \cos \psi + (dT_2 - dT_4) \sin \psi \\ dP_1 + dP_2 + dP_3 + dP_4 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

La composante de  $d\vec{F}$  sur  $\vec{x}$  est calculée par :

$$d\vec{F} \cdot \vec{x} = (dT_1 - dT_3) \sin \psi + (dT_2 - dT_4) \cos \psi$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{d\vec{F} \cdot \vec{x}}{dk} &= (V_{\infty 1}^2 - V_{\infty 3}^2) \sin \psi + (V_{\infty 2}^2 - V_{\infty 4}^2) \cos \psi \\
&= \left( (\Omega r + V \sin \psi)^2 - (\Omega r - V \sin \psi)^2 \right) \sin \psi + \left( (\Omega r + V \cos \psi)^2 - (\Omega r - V \cos \psi)^2 \right) \cos \psi \\
&= (4\Omega r V \sin \psi) \sin \psi + (4\Omega r V \cos \psi) \cos \psi \\
&= 4\Omega r V (\sin^2 \psi + \cos^2 \psi) \\
&= 4\Omega V r \\
\Rightarrow d\vec{F} \cdot \vec{x} &= \frac{1}{2} \rho C_x 4\Omega V r dS
\end{aligned}$$

On remarque essentiellement que cette composante de force est constante sur un tour (ne dépend pas de  $\psi$ ).

La composante de  $d\vec{F}$  sur  $\vec{y}$  est calculée par :

$$\begin{aligned}
d\vec{F} \cdot \vec{y} &= -(dT_1 - dT_3) \cos \psi + (dT_2 - dT_4) \sin \psi \\
\Rightarrow \frac{d\vec{F} \cdot \vec{y}}{dk} &= (V_{\infty 1}^2 - V_{\infty 3}^2) \sin \psi + (V_{\infty 2}^2 - V_{\infty 4}^2) \cos \psi \\
&= \left( (\Omega r + V \sin \psi)^2 - (\Omega r - V \sin \psi)^2 \right) \sin \psi + \left( (\Omega r + V \cos \psi)^2 - (\Omega r - V \cos \psi)^2 \right) \cos \psi \\
&= -(4\Omega r V \sin \psi) \cos \psi + (4\Omega r V \cos \psi) \sin \psi \\
&= 0
\end{aligned}$$

On remarque essentiellement que cette composante de force est nulle.

La composante de  $d\vec{F}$  sur  $\vec{z}$  est calculée par :

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{F} \cdot \vec{z}}{f dk} &= V_{\infty 1}^2 + V_{\infty 2}^2 + V_{\infty 3}^2 + V_{\infty 4}^2 \\
&= (\Omega r + V \sin \psi)^2 + (\Omega r - V \sin \psi)^2 + (\Omega r + V \cos \psi)^2 + (\Omega r - V \cos \psi)^2 \\
&= 4\Omega^2 r^2 + 2V^2 \sin^2 \psi + 2V^2 \cos^2 \psi \\
&= 4\Omega^2 r^2 + 2V^2 \\
\Rightarrow d\vec{F} \cdot \vec{z} &= \frac{1}{2} \rho C_z (4\Omega^2 r^2 + 2V^2) dS
\end{aligned}$$

On remarque essentiellement que cette composante de force élémentaire ne dépend pas de  $\psi$  !

Nous avons obtenu la force élémentaire exercée sur l'ensemble des surfaces élémentaires analogues des 4 pales. Pour obtenir la force globale sur le quadripale il suffit d'intégrer chacune des composantes :

$$\vec{F} \cdot \vec{x} = \int_{r_0}^R \frac{1}{2} \rho C_x 4\Omega V r dS = \frac{1}{2} \rho C_x 4\Omega V \underbrace{\int_{r_0}^R r dS}_A = \frac{1}{2} \rho C_x 4A\Omega V$$

$$\begin{aligned}
\vec{F} \cdot \vec{z} &= \int_{r_0}^R \frac{1}{2} \rho C_z (4\Omega^2 r^2 + 2V^2) dS = \frac{1}{2} \rho C_z \left( 4\Omega^2 \underbrace{\int_{r_0}^R r^2 dS}_I + 2V^2 \underbrace{\int_{r_0}^R dS}_S \right) \\
&= \frac{1}{2} \rho C_z (4I\Omega^2 + 2SV^2)
\end{aligned}$$

où  $I$ ,  $A$ , et  $S$  désignent respectivement les moments quadratique et statique et la section d'une pale et  $4I$ ,  $4A$  et  $4S$  les moments quadratique et statique et la section du quadripale.

On retrouve exactement les mêmes types d'expressions "moyennes" que pour un tripale.

## 2.4 Moment en $O$

Le moment en  $O$  de la force  $d\vec{F}_i$  possède une composante sur  $\vec{z}$  qui provient de  $dT_i$  et des composantes suivant  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  qui proviennent de  $dP_i$  :

$$d\vec{M}_i(O) = -rdP_i\vec{e}_{\theta_i} - rdT_i\vec{z}$$

et le moment en  $O$  de la force élémentaire exercée sur l'ensemble des surfaces élémentaires analogues des 4 pales.

$$\begin{aligned} d\vec{M}(O) = \sum_{i=1}^4 d\vec{M}_i(O) &\implies \frac{d\vec{M}(O)}{-r} = \sum_{i=1}^4 V_{\infty i}^2 dP_i\vec{e}_{\theta_i} + \vec{z} \sum_{i=1}^4 dT_i \\ &= f dk \sum_{i=1}^4 V_{\infty i}^2 \vec{e}_{\theta_i} + \vec{z} dk \sum_{i=1}^4 V_{\infty i}^2 \end{aligned}$$

Effectuons les 2 sommes une à une :

la seconde :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 V_{\infty i}^2 &= (\Omega r + V \sin \psi)^2 + (\Omega r - V \sin \psi)^2 + (\Omega r + V \cos \psi)^2 + (\Omega r - V \cos \psi)^2 \\ &= 4\Omega^2 r^2 + 2V^2(\sin^2 \psi + \cos^2 \psi) = 4\Omega^2 r^2 + 2V^2 \end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$d\vec{M}(O) \cdot \vec{z} = -[4\Omega^2 r^2 + 2V^2] r dk = -\frac{1}{2} \rho C_x [4\Omega^2 r^2 + 2V^2] r dS$$

la première :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 V_{\infty i}^2 \vec{e}_{\theta_i} &= (\Omega r + V \sin \psi)^2 \begin{pmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y})} - (\Omega r - V \sin \psi)^2 \begin{pmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y})} \\ &\quad \dots - (\Omega r + V \cos \psi)^2 \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y})} + (\Omega r - V \cos \psi)^2 \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y})} \\ &= 4\Omega r V \sin \psi \begin{pmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y})} - 4\Omega r V \cos \psi \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y})} \\ &= 4\Omega r V \begin{pmatrix} -\sin^2 \psi - \cos^2 \psi \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y})} = -4\Omega r V \vec{x} \end{aligned}$$

Il n'y a donc pas de composante sur  $\vec{y}$  (contrairement au tripale). Ce qui nous donne :

$$d\vec{M}(O) \cdot \vec{x} = \frac{1}{2} \rho C_z 4\Omega r^2 V dS$$

On peut alors déterminer le moment en  $O$  de l'action de l'air sur l'ensemble du quadripale :

$$\begin{aligned} \vec{M}(O) &= \int_{r_0}^R d\vec{M}(O) = \frac{1}{2} \rho C_z 4\Omega V \int_{r_0}^R r^2 dS \vec{x} - \frac{1}{2} \rho C_x \left[ 4\Omega^2 \int_{r_0}^R r^2 dS + 2V^2 \int_{r_0}^R r dS \right] \vec{z} \\ &= \frac{1}{2} \rho C_z 4\Omega V I \vec{x} - \frac{1}{2} \rho C_x [4\Omega^2 Q + 2V^2 A] \vec{z} \end{aligned}$$

On remarque à nouveau l'expression des moments "quintique"  $Q$ , quadratique  $I$  et statique  $A$  d'une pale  $i$ .

## 2.5 Résumé

On vient donc de modéliser l'action de l'air sur le quadripale qui est représentée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F} = \begin{pmatrix} F_x = \frac{4}{2}\rho C_x \Omega V A \\ 0 \\ F_z = \frac{4}{2}\rho C_z \left[ \Omega^2 I + \frac{1}{2} V^2 S \right] \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad : \text{Trainée} \\ \\ \vec{M}(O) = \begin{pmatrix} M_{Ox} = \frac{4}{2}\rho C_z \Omega V I \\ 0 \\ M_{Oz} = -\frac{4}{2}\rho C_x \left[ \Omega^2 Q + \frac{1}{2} V^2 A \right] \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad : \text{entraîne l'effet gyroscopique} \\ \\ \text{où } S = \int_{r_0}^R dS \quad , \quad A = \int_{r_0}^R r dS \quad , \quad I = \int_{r_0}^R r^2 dS \quad , \quad Q = \int_{r_0}^R r^3 dS \end{array} \right. \quad : \text{Portance}$$

sont les caractéristiques géométriques d'une pale.

### 2.5.1 centre de poussée $C$

Déterminons la position du centre de poussée  $C$  situé dans le plan du quadripale au même niveau que  $O$  :  $\vec{OC} = a\vec{x} + b\vec{y}$ .

$$\begin{aligned} \vec{M}(C) = \vec{0} &\implies \vec{M}(O) + \vec{F} \wedge \vec{OC} = \vec{0} \implies -\vec{M}(O) = \vec{F} \wedge \vec{OC} \\ - \begin{pmatrix} M_{Ox} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -bF_z \\ aF_z \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} M_{Ox} = bF_z \\ 0 = aF_z \end{cases} \implies \begin{cases} b = \frac{M_{Ox}}{F_z} \\ a = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Le centre de poussée  $C$  (de la composante  $\vec{F} \cdot \vec{z}$ ) est positionné par :

$$\begin{aligned} \vec{OC} &= b\vec{y} \quad \text{avec} \\ b &= \frac{4}{2}\rho I C_z V \Omega \frac{2}{4\rho C_z} \left( \Omega^2 I + \frac{1}{2} V^2 S \right)^{-1} = \frac{IV\Omega}{\Omega^2 I + \frac{1}{2} V^2 S} = \frac{1}{\frac{\Omega}{V} + \frac{S}{2I}\frac{V}{\Omega}} \end{aligned}$$

C'est la même expression que la position moyenne sur le tripale.